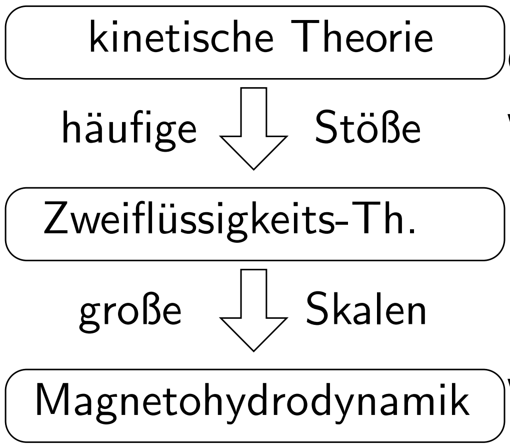
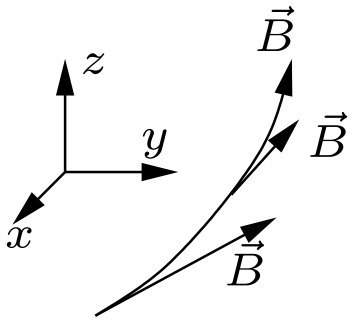
Magnetohydrodynamik

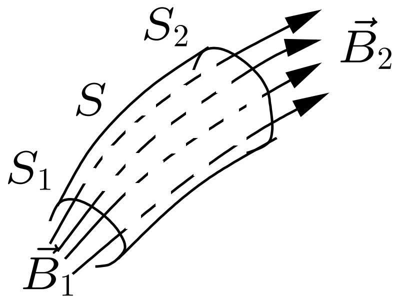
Die in der Einführung besprochene kinetische Physik vermag sehr schnelle Phänomene zu behandeln, wie auch Phänomene, die eng mit den Geschwindigkeitsverteilungsfunktionen der einzelnen Teilchenspezies verbunden sind. So kann man mit ihr z. B. das Verhalten eines Plasmas beschreiben, in welches ein Strahl von energiereichen Elektronen eindringt, oder wie Teilchen und Wellen wechselwirken.



Es gibt aber auch ein andere Extremsituation, in der sich das Plasma langsam ändert und als Flüssigkeit beschrieben werden kann. Man nennt diese Beschreibung denn auch **Magnetohydrodynamik**, kurz **MHD**. Sie gilt in einem Plasma, in welchem Stöße sehr effizient sind und das Plasma immer im thermodynamischen Gleichgewicht halten, und welches wesentlich größer ist, als die typischen Längen im Plasma, wie etwa die Debye-Länge.

Was ist eine Feldlinie, was eine Flussröhre?





Wir definieren eine **Feldlinie** als eine Linie, deren Tangente überall und jederzeit in die Richtung des magnetischen Feldes $\vec{B}$ zeige. In kartesischen Koordinaten ist sie die Lösung von

$$\frac{\mathrm{d}x}{B_x} = \frac{\mathrm{d}y}{B_y} = \frac{\mathrm{d}z}{B_z}. \tag{1}$$

Eine **Flussröhre** ist dasjenige Plasmavolumen, welches durch eine Ansammlung von Feldlinien eingegrenzt wird, die von einer geschlossenen Kurve S ausgehen. Dabei bleibt F_m durch eine durch S_i berandete Fläche S erhalten,

$$F_m = \int_S \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \text{const.} \tag{2}$$

wo $\mathrm{d}\vec{S}$ in dieselbe Richtung zeige, wie $\vec{B}$ damit $F_m > 0$, wie man leicht sieht: Wir integrieren Glg. 2 über die Fläche S, welche das Volumen V der Flussröhre zwischen den beiden Endflächen S_1 und S_2 berande. Der Beitrag der gekrümmten Fläche S verschwindet, weil sie ja immer tangential an das Feld anliegt. Also gilt

$$\int_S \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \int_{S_1} \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{S} + \int_{S_2} \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{S},$$

wo $\mathrm{d}\vec{S}$ jetzt immer nach außen zeige. Nach dem Satz von Gauß gilt aber auch

$$\int_S \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{B} \mathrm{d}V,$$

was wegen $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$ verschwindet. Damit gilt die Behauptung.

Stöße im Plasma

In einem vollständig ionisierten Plasma gibt es vier verschiedene Arten von Stößen: Elektron-Elektron (ee), Ion-Ion (ii), Elektron-Ion (ei) und Ion-Elektron (ie). Wir schätzen ihre Stoßfrequenzen $\nu_{ee}, \nu_{ii}, \nu_{ei}$ und ν_{ie} für Impulsänderungen um mehr als $\pi/2$ wie folgt ab.

Der Ausdruck für die Stoßfrequenz lautet dann

$$\nu = n\sigma v = n\pi \left(\frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{\mu v_{\mathrm{th}}^2} \right)^2 v_{\mathrm{th}}, \quad \text{wo} \quad v_{\mathrm{th}} = (2k_B T_\alpha / m_\alpha)^{1/2}$$

und der Index $\alpha = e, i$ bedeute. In einem Stoß trifft das stoßende Teilchen stets auf einen ruhenden Stoßpartner. Wir nehmen an, dass sich alle Teilchen mit einer für sie typischen Geschwindigkeit bewegen, diese ist die thermische Geschwindigkeit,

v_{th}. Ferner nehmen wir an, dass die Temperatur der Elektronen und Ionen vergleichbar sei. Nicht gleich, aber vergleichbar, also dieselbe Größenordnung.

Dann gilt

$$\begin{aligned}
\nu_{ee} &= n\pi\left(\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2}{2k_BT_e}\right)^2\sqrt{\frac{2k_BT_e}{m_e}}, \\
\nu_{ei} &= n\pi\left(\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{2k_BT_e}\right)^2\sqrt{\frac{2k_BT_e}{m_e}}, \\
\nu_{ii} &= n\pi\left(\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2}{2k_BT_i}\right)^2\sqrt{\frac{2k_BT_i}{m_i}},
\end{aligned}$$

es gilt also $\nu_{ee} : \nu_{ei} : \nu_{ii} = 1 : 1/4 : (m_e/m_i)^{1/2}$.

Der Stoß eines Ions mit einem Elektron müsste etwas genauer untersucht werden, als wir das jetzt im Folgenden tun, für unsere Abschätzung reicht es aber. Wegen Impulserhaltung gilt $m_i \Delta v_i = -m_e \Delta v_e$, wo Δv die Geschwindigkeitsänderung im Stoß bedeute. Stößt das Ion zentral mit dem (ruhenden) Elektron, so fliegt dieses mit der doppelten Geschwindigkeit des Ions weg. Das heißt also, $\Delta v_e = 2v_i$ und folglich wegen Impulserhaltung $\Delta v_i / v_i = 2m_e/m_i$. Einen Stoß hatten wir ja definiert als eine Richtungsänderung um 90 Grad. Dabei ändert sich der Geschwindigkeitsvektor $\Delta v \approx v$. Um nun $\Delta v_i/v_i \approx 1$ zu erreichen, braucht es also ca. m_i/m_e 'zentrale' Stöße, während es für $\Delta v_e/v_e \approx 1$ nur einen 'zentralen' Stoß eines Elektrons mit einem Elektron braucht. Deshalb ist

$$\nu_{ie} \sim (m_e/m_p)\nu_{ee}.$$

Zusammenfassend können wir also sagen:

$$\nu_{ee} : \nu_{ei} : \nu_{ii} : \nu_{ie} \approx 1 : 1/4 : (m_e/m_i)^{1/2} : m_e/m_i.$$

Wir betrachten nun auch noch die Stoßfrequenzen ν_E für Stöße, in denen ein Stoßpartner dem anderen Energie übergibt. Trifft ein Elektron auf ein Elektron, kann es in einem zentralen Stoß seine gesamte Energie an dieses abgeben. Dasselbe gilt für Ion-Ion. Stöße von identischen Stoßpartnern übergeben also Energie mit derselben Rate wie Impuls. Stößt nun ein Ion mit einem Elektron übergibt es diesem zwar viel Energie, verliert aber selber nur sehr wenig. Die Geschwindigkeit eines Elektrons nach einem zentralen Stoß mit einem ruhenden Ion ist $-v_e$, die Impulsänderung $-2m_e v_e$. Wegen Impulserhaltung hat das Ion jetzt einen Impuls $m_i v_i = 2m_e v_e$. Das Elektron konnte also

$$\frac{1}{2}m_i v_i^2 = \frac{(2m_e v_e)^2}{2m_i} = 4\frac{m_e}{m_i}\,\frac{1}{2}m_e v_e^2$$

an kinetischer Energie an das Ion abgeben. Um seine Energie ganz abzugeben, muss das Elektron etwa m_i/m_e Mal stoßen[1]. Genau dasselbe gilt, wenn ein Ion

[1] Ein Faktor 4 ist hier irrelevant.

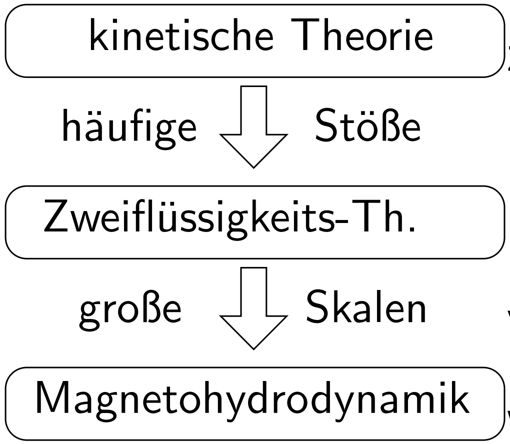
auf ein ruhendes Elektron trifft.

Zusammenfassend gilt also:

	~ 1	$\sim (m_e/m_i)^{1/2}$	$\sim (m_e/m_i)$
Impuls	ν_{ee}, ν_{ei}	ν_{ii}	ν_{ie}
Energie	ν_{Eee}, ν_{Eii}		ν_{Eei}, ν_{Eie}

Dies bedeutet, dass in einem Plasma die Elektronen untereinander sehr oft stoßen, und zwar $(m_i/m_e)^{1/2} \sim 43$-mal häufiger, als Ionen mit Ionen. Die Elektronen sind sehr schnell untereinander im thermodynamischen Gleichgewicht. Die Ionen brauchen etwa vierzigmal länger, um ins thermodynamiche Gleichgewicht zu kommen als die Elektronen. Bis die Elektronen und die Ionen gegenseitig im thermodynamischen Gleichgewicht sind, braucht es nochmals etwa vierzigmal länger.

Magnetohydrodynamik: Zwei mögliche Wege

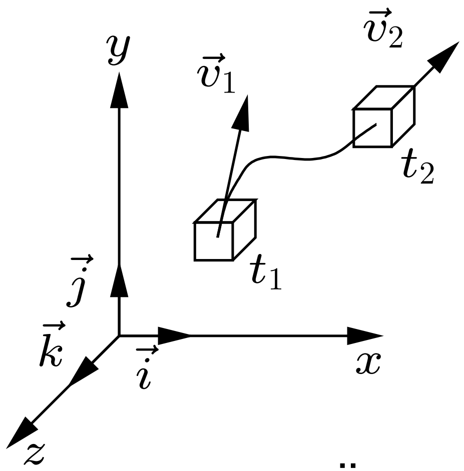


Wie aus den vorigen Überlegungen klar wurde, ist es zunächst sinnvoll, die Elektronen und die Ionen als zwei separate Flüssigkeiten zu behandeln[2]. In einem zweiten Schritt kann man dann die Gleichungen der MHD zusammenstellen. Wir werden dies nicht tun, sondern die MHD mit Hilfe von Überlegungen aus der Hydrodynamik erarbeiten.

Wir nehmen im Folgenden immer an, dass die Stoßfrequenzen groß genug sind, dass die Flüssigkeitsbeschreibung gerechtfertigt ist. Dies bedeutet, dass die Dichte des Plasmas entsprechend seiner Temperatur hoch genug sein muss. Sind Stöße häufig, sind auch die Verteilungsfunktionen Maxwellsch und der Begriff der Temperatur ist wohl definiert.

[2] In einigen Situationen ist es sogar sinnvoll, die Elektronen als Flüssigkeit zu betrachten, die Ionen aber kinetisch zu behandeln. Wir werden dies hier nicht tun.

Die substantielle und konvektive Ableitung



Wir betrachten ein Flüssigkeitselement, welches sich im Raum bewegt. Zum Zeitpunkt t_1 sei es am Ort $\vec{x}_1$ und habe die Geschwindigkeit $\vec{v}_1$. Zur Zeit t_2 sei es bei $\vec{x}_2$ mit $\vec{v}_2$. Eine Größe der Flüssigkeit, z.B. die Dichte ρ, hat sich in dieser Zeit verändert:

$$\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t} \doteq \lim_{t_2 \longrightarrow t_1} \frac{\rho_2 - \rho_1}{t_2 - t_1}. \quad (3)$$

Man nennt diese Ableitung die **substantielle Ableitung**. Sie beschreibt die Änderung einer Größe entlang der Bewegung des Flüssigkeitpaketetes.

Die Dichte $\rho_1 = \rho_1(x_1, y_1, z_1, t_1)$ ändert sich zu $\rho_2 = \rho_2(x_2, y_2, z_2, t_2)$. Wir können ρ_2 entwickeln

$$\rho_2 = \rho_1 + \left(\frac{\partial \rho}{\partial x}\right)(x_2 - x_1) + \left(\frac{\partial \rho}{\partial y}\right)(y_2 - y_1) + \left(\frac{\partial \rho}{\partial z}\right)(z_2 - z_1) + \frac{\partial \rho}{\partial t}(t_2 - t_1),$$

was wir durch $(t_2 - t_1)$ dividieren und dann in Glg. 3 einsetzen:

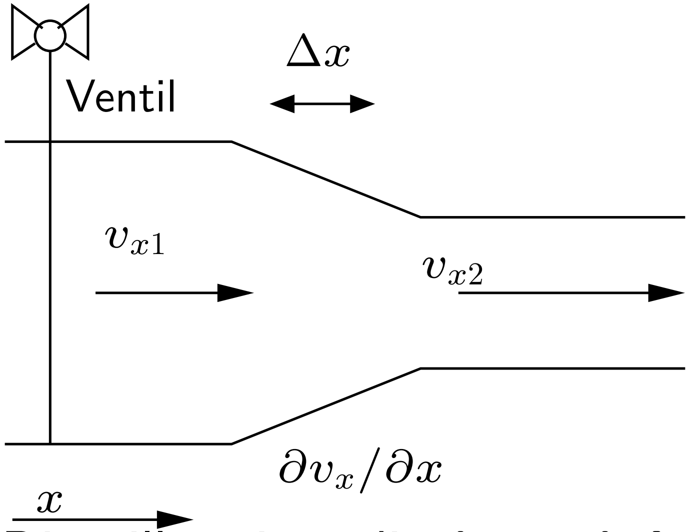
$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t} = \lim_{t_2 \longrightarrow t_1} \left(\frac{\rho_2 - \rho_1}{t_2 - t_1} \right) &= \lim_{t_2 \longrightarrow t_1} \left[\frac{\partial \rho}{\partial x} \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} + \frac{\partial \rho}{\partial y} \frac{y_2 - y_1}{t_2 - t_1} + \frac{\partial \rho}{\partial z} \frac{z_2 - z_1}{t_2 - t_1} + \frac{\partial \rho}{\partial t} \right] \\
&= \left(\frac{\partial \rho}{\partial x} \right) v_x + \left(\frac{\partial \rho}{\partial y} \right) v_y + \left(\frac{\partial \rho}{\partial z} \right) v_z + \frac{\partial \rho}{\partial t}, \\
\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t} &= \left(\frac{\partial}{\partial t} + v_x \frac{\partial}{\partial x} + v_y \frac{\partial}{\partial y} + v_z \frac{\partial}{\partial z} \right) \rho. \qquad (4)
\end{aligned}$$

Damit haben wir die substantielle Ableitung definiert als

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \doteq \frac{\partial}{\partial t} + v_x \frac{\partial}{\partial x} + v_y \frac{\partial}{\partial y} + v_z \frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial t} + \left(\vec{v} \cdot \vec{\nabla} \right) \qquad (5)$$

Sie besteht aus einer **zeitlichen Abl.** $(\partial / \partial t)$ und einer **konvektiven Abl.** $\vec{v} \cdot \vec{\nabla}$.

Die zeitliche und konvektive Ableitung



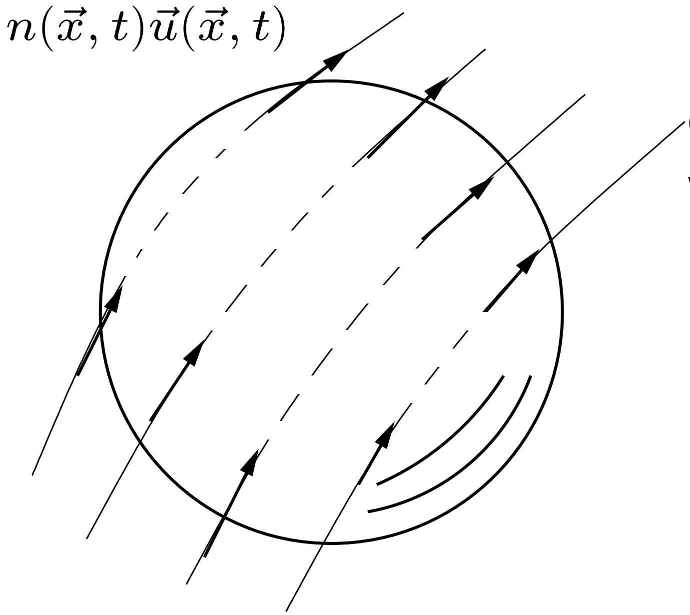
Die Abb. links zeigt eine Flüssigkeitsströmung durch eine Verengung in einem Rohr. Um den Massenfluss konstant zu halten, muss die Geschwindigkeit rechts größer sein als links, die Geschwindigkeit ändert sich über eine Strecke Δx um $\Delta v = (\partial v_x/\partial x)\Delta x$.

$$\frac{\Delta v_x}{\Delta t} = \frac{(\partial v_x/\partial x)\Delta x}{\Delta x/v_x} = v_x \frac{\partial v_x}{\partial x}.$$

Dies illustriert die **konvektive** Ableitung. Die Geschwindigkeit kann sich aber auch **zeitlich** ändern, wenn ich z.B. am Ventil links drehe, und zwar um $\partial v_x/\partial t$. Insgesamt haben wir eine Änderung der Geschwindigkeitskomponenten v_x um

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + v_x \frac{\partial}{\partial x}\right) v_x, \quad \text{die substantielle Ableitung.}$$

Die Kontinuitätsgleichung



Wir betrachten N Teilchen in einem Volumen V. Deren Anzahl kann sich nur ändern, wenn es durch die Oberfläche S von V einen Teilchenfluss $n\vec{u}$ gibt, wo $n = N/V$ (Vorzeichen: $\mathrm{d}\vec{S}$ zeigt nach außen!).

$$\frac{\partial N}{\partial t} = \int_V \frac{\partial n}{\partial t}\mathrm{d}V = -\oint n\vec{u}\cdot\mathrm{d}\vec{S} = -\int_V \vec{\nabla}\cdot(n\vec{u})\mathrm{d}V, \tag{6}$$

mit dem Satz von Gauß. Die Integranden der Volumenintegrale müssen gleich sein, und folglich gilt

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot(n\vec{u}) = 0. \tag{7}$$

Dies ist die **Kontinuitätsgleichung** für eine Flüssigkeit.

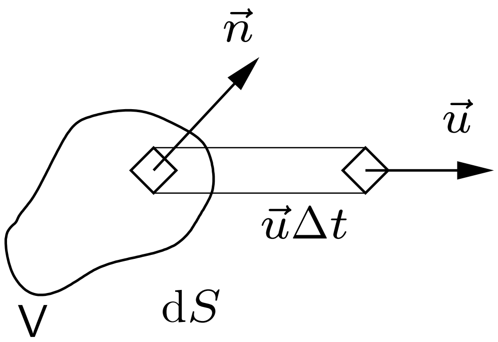
Kontinuitätsgleichung II

Wir können den Divergenzterm in Glg. 7 ausmultiplizieren und erhalten

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial n}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (n\vec{u}) &= 0, \\
\frac{\partial n}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla})n + n\vec{\nabla} \cdot \vec{u} &= 0, \\
\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}t} + n\vec{\nabla} \cdot \vec{u} &= 0.
\end{aligned} \tag{8}
$$

Beide Formen der Kontinuitätsgleichung sind gleichberechtigt, Glg. 7 nennt man **konservativ** und Glg. 8 **nicht konservativ**. Glg. 8 verwendet die substantielle Ableitung, bewegt sich also mit dem Flüssigkeitspaket mit. Der Term $\vec{\nabla} \cdot \vec{u}$ verschwindet für inkompressible Flüssigkeiten, wie wir gleich sehen werden. Die Dichte n eines Flüssigkeitspaketes bleibt dann entlang seiner Trajektorie konstant.

Was bedeutet $\vec{\nabla} \cdot \vec{u} = 0$?



Links ist ein Volumen V abgebildet, welches deformiert wird. $\mathrm{d}S$ wird um $\Delta x = \vec{u}\Delta t$ ausgelenkt und die Volumenänderung ist $\Delta V = (\vec{u}\Delta t) \cdot \mathrm{d}\vec{S}$. Die Volumenänderung ΔV pro Zeiteinheit Δt ist

$$
\begin{aligned}
\frac{\Delta V}{\Delta t} &= \frac{1}{\Delta t} \int\int_S (\vec{u}\Delta t) \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \int\int_S \vec{u} \cdot \mathrm{d}\vec{S}, \\
&= \int\int\int_V \left(\vec{\nabla} \cdot \vec{u}\right) \mathrm{d}V,
\end{aligned}
$$

wo wir den Satz von Gauß angewendet haben.

Die physikalische Bedeutung von $\vec{\nabla} \cdot \vec{u}$ ist also die Änderungsrate des Volumens. In einer inkompressiblen Flüssigkeit gilt deshalb $\vec{\nabla} \cdot \vec{u} = 0$.

Die Bewegungsgleichung

Die Bewegungsgleichung für ein einzelnes geladenes Teilchen der Geschwindigkeit $\vec{v}$ kennen wir schon

$$m\dot{\vec{v}} = q\left(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}\right). \tag{9}$$

Wenn das Teilchen vollständig an die Flüssigkeit gebunden ist, so müsste das doch auch die Bewegungsgleichung für die Flüssigkeit sein, und wir würden diese erhalten, indem wir Glg. 9 mit der Dichte n multiplizieren.

$$mn\dot{\vec{u}} = qn\left(\vec{E} + \vec{u} \times \vec{B}\right), \tag{10}$$

wo $\vec{u}$ die Geschwindigkeit des Flüssigkeitelementes sei. Diese Gleichung ist in der Tat absolut korrekt wenn wir annehmen, dass thermische Schwankungen keine Rolle spielen und keine Stöße stattfinden. Sie ist aber auch nicht gerade nützlich weil Glg. 9 ja am Ort des Teilchens ausgewertet werden muss. Man muss sich also ins Bezugssystem des Teilchens begeben, damit Glg. 10 gilt, in anderen Worten, die zeitliche Ableitung links ist die substantielle Ableitung.

$$mn\frac{\mathrm{d}\vec{u}}{\mathrm{d}t} = \rho\frac{\mathrm{d}\vec{u}}{\mathrm{d}t} = qn\left(\vec{E} + \vec{u} \times \vec{B}\right), \quad \text{wo} \quad \rho = mn. \tag{11}$$

In der Regel will man eine Flüssigkeit aber im Laborsystem betrachten, z.B. die Strömung durch ein System von Rohren, den Sonnenwind im Sonnensystem, etc. Das heisst, wir müssen Glg. 10 umschreiben in ein ruhendes Bezugssystem, in welchem sich die Flüssigkeit bewegt. Dazu müssen wir Glg. 11 in die konservative Form bringen, wozu wir folgendes verwenden:

$$\frac{\partial(\rho\vec{u})}{\partial t} = \rho\frac{\partial\vec{u}}{\partial t} + \vec{u}\frac{\partial\rho}{\partial t}, \quad \text{also} \quad \rho\frac{\partial\vec{u}}{\partial t} = \frac{\partial(\rho\vec{u})}{\partial t} - \vec{u}\frac{\partial\rho}{\partial t}, \quad \text{und} \tag{12}$$

$$\vec{\nabla}\cdot(\rho u\vec{u}) = u\vec{\nabla}\cdot(\rho\vec{u}) + (\rho\vec{u})\cdot\vec{\nabla}u, \tag{13}$$

wo u z.B. die x-Komponente der Fließgeschwindigkeit $\vec{u}$ sei. Glg. 13 gilt natürlich sinngemäß auch für alle anderen Komponenten. Wir setzen Glg. 12 und 13 in die substantielle Ableitung ein,

$$
\begin{aligned}
\rho \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} &= \rho \frac{\partial u}{\partial t} + \rho \vec{u} \cdot \vec{\nabla} u, \\
\rho \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} &= \frac{\partial(\rho u)}{\partial t} - u \frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho u \vec{u}) - u \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{u}) , \\
&= \frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho u \vec{u}) - u \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{u}) \right] , \\
&= \frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho u \vec{u}) , \qquad (14)
\end{aligned}
$$

weil in der eckigen Klammer die Kontinuitätsgleichung steht, die ihrerseits gleich Null ist. Wir setzen das nun in Glg. 11 ein und erhalten die Bewegungsgleichung in konservativer Form,

$$\frac{\partial \rho \vec{u}}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{u}\vec{u}) = qn \left(\vec{E} + \vec{u} \times \vec{B}\right). \tag{15}$$

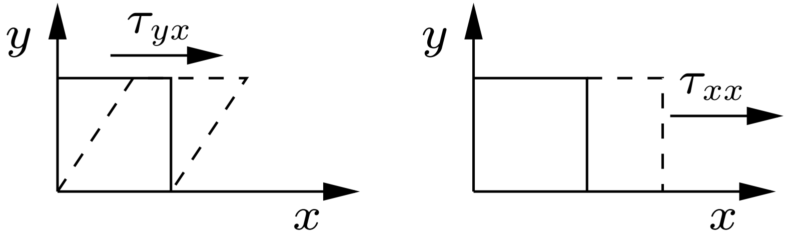
Die Unterscheidung in konservative und nicht-konservative Form wurde erst durch die numerische Behandlung der Hydrodynamik (Computational Fluid Dynamics) eingeführt. Die nicht-konservativen Formen sind immer im mitbewegten System, die konservativen in einem räumlich festen System. Letztere haben immer die Form

$$\frac{\partial}{\partial t}(\text{Erhaltungsgröße}) + \vec{\nabla} \cdot (\text{entspr. Fluss}) = \text{Quellterm.}$$

Die Bewegungsgleichung wird oft auch Impulsgleichung genannt. Die nicht-konservativen Gleichungen sind oft einfacher aus der Einzelteilchenbewegung herzuleiten.

Nun müssen wir noch alle anderen Kräfte in der Impulsgleichung berücksichtigen!

Die Bewegungsgleichung II



In der gewöhnlichen Hydrodynamik kommen neben den Kräften auf das Volumen auch Oberflächenkräfte hinzu, insbesondere der Druckgradient und Scher- bzw. Schubkräfte. Der Einfachheit halber betrachten wir nur die x-Komponente. Die Abb. links definiert die Konvention der Benennung der Scherkräfte. τ_{ij} ist die Scherkraft in die $\vec{j}$-Richtung, die auf die Fläche mit Normalenvektor $\vec{i}$ wirkt.

In Abb. 1 sind die x-Komponenten der Druckkraft $p\mathrm{d}y\mathrm{d}x$ und der Scherkräfte $\tau_{ij}\mathrm{d}j\mathrm{d}k$ auf ein Flüssigkeitselement dargestellt. Der Anfang der Vektoren ist sinnbildlich mit der Ebene, auf die die Kraft wirkt, verknüpft.

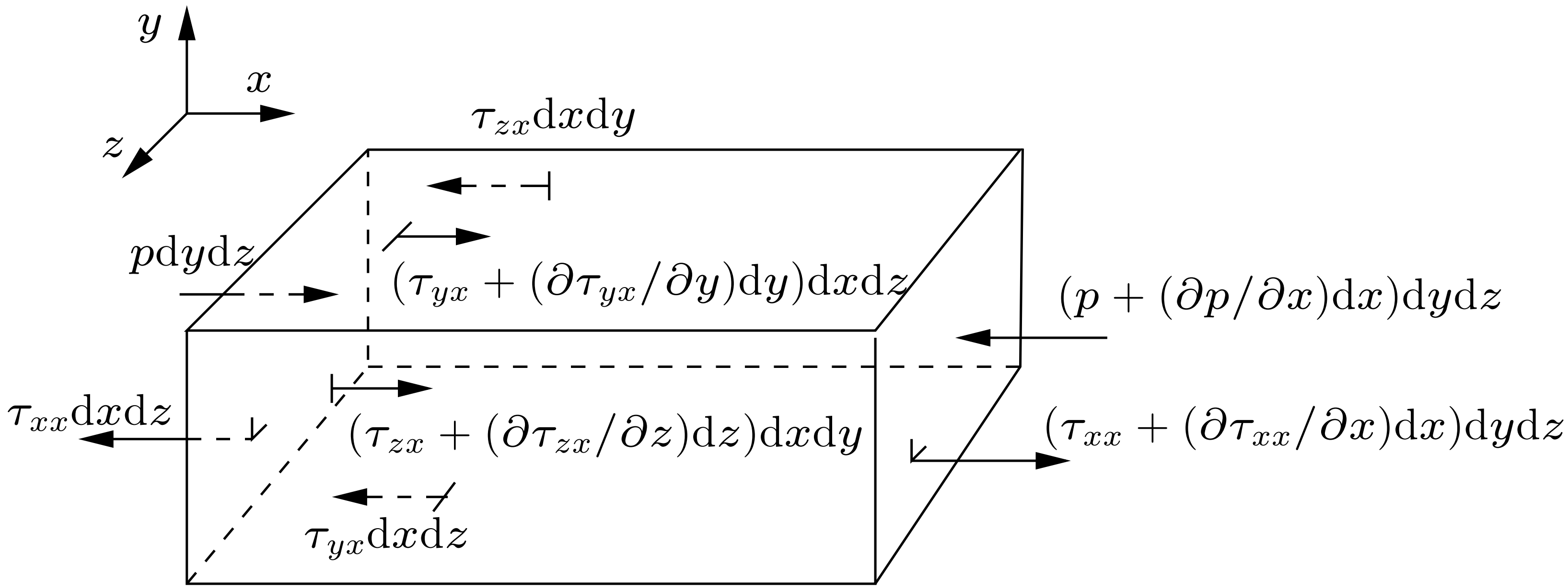


Abbildung 1: Definition der Druck- und Scherkräfte in x-Richtung auf ein Flüssigkeitelement.

Die Netto-Oberflächenkraft auf das Paket $\mathrm{d}x\ \mathrm{d}y\ \mathrm{d}z$ ist

$$
\begin{aligned}
F_{A_x} \quad = \quad & \left[p - \left(p + \frac{\partial p}{\partial x}\mathrm{d}x\right)\right]\mathrm{d}y\mathrm{d}z + \left[\left(\tau_{xx} + \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x}\mathrm{d}x\right) - \tau_{xx}\right]\mathrm{d}y\mathrm{d}z + \\
& \left[\left(\tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y}\mathrm{d}y\right) - \tau_{yx}\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}z + \left[\left(\tau_{zx} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z}\mathrm{d}z\right) - \tau_{zx}\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y.
\end{aligned}
$$

Insgesamt wirkt also auf das Flüssigkeitsvolumen $\mathrm{d}V = \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ die Kraft

$$
\frac{\partial \rho \vec{u}}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{u}\vec{u}) = qn\left(\vec{E} + \vec{u} \times \vec{B}\right) - \vec{\nabla} p + \vec{\nabla} \cdot \tau, \tag{16}
$$

wo τ der Scherungstensor ist, der aus allen τ_{ij} besteht. Im Falle der gewöhnlichen Hydrodynamik, wo statt der Lorentzkraft andere Kräfte wirken, ist Glg. 16 die (nicht-lineare) **Navier-Stokes-Gleichung**. Neben den hier behandelten Kräften können z.B. auch die Gravitation oder Corioliskraft eine Rolle spielen.

Was bedeutet $\vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{u}\vec{u})$?

Am besten schaut man sich dazu die Bewegungsgleichung komponentenweise an:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \rho u_x}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho u_{\underline{x}} \vec{u}) &= qn \left(\vec{E} + \vec{u} \times \vec{B} \right)_x - \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{x\underline{x}}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{y\underline{x}}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{z\underline{x}}}{\partial z}, \\
\frac{\partial \rho u_y}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \left(\rho u_{\underline{y}} \vec{u}\right) &= qn \left(\vec{E} + \vec{u} \times \vec{B} \right)_y - \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{x\underline{y}}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{y\underline{y}}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{z\underline{y}}}{\partial z}, \\
\frac{\partial \rho u_z}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho u_{\underline{z}} \vec{u}) &= qn \left(\vec{E} + \vec{u} \times \vec{B} \right)_z - \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{x\underline{z}}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{y\underline{z}}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{z\underline{z}}}{\partial z}.
\end{aligned}
$$

$\rho u_x \vec{u}$ ist der Fluss der x-Komponente des Impulses der Flüssigkeit und $\vec{\nabla} \cdot (\rho u_x \vec{u})$ dessen Divergenz. $\vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{u}\vec{u})$ ist damit die Divergenz des Impulsflusses. Die oft komplizierten Gleichungen der (Magneto-) Hydrodynamik sind in der Regel einfacher verständlich, wenn man sie komponentenweise betrachtet.

Wie wirken die Druck- und Scherkräfte?

Schauen wir uns die x-Komponente von $\vec{\nabla} \cdot \tau$ an. Diese Oberflächenkraft ist

$$F_{A_x} - \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z},$$

was wir mit der Einsteinschen Summenkonvention schreiben als

$$F_{A_x} - \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial \tau_{ix}}{\partial i}, \quad \text{oder allgemein} \quad F_{A_j} - \frac{\partial p}{\partial j} = \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial i},$$

wo i und j je x, y oder z sein können. Die Kraft auf das Material im Volumen ist

$$\vec{F}_j = \int_V F_{A_j} \mathrm{d}V = \int_V \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial i} \mathrm{d}V$$

Wir definieren vorübergehend einen Vektor $\vec{A} \doteq (\tau_{jx}, \tau_{jy}, \tau_{jz})$, womit

$$\vec{F}_j = \int_V \frac{\partial \vec{A}_i}{\partial i} \mathrm{d}V = \int_V \left(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}\right) \mathrm{d}V = \oint_S \vec{A} \cdot \vec{n} \mathrm{d}S = \oint_S A_i n_i \mathrm{d}S = \oint_S \tau_{ij} n_i \mathrm{d}S,$$

wo wir den Satz von Gauß angewendet haben. Für die Nettokraft spielen nur die Druck- und Scherkräfte an der Oberfläche eine Rolle. Es reicht also, die Druck- und Scherkräfte nur an der Oberfläche zu kennen und wir können die Nettokraft auf ein Volumen berechnen.

In einem Plasma stammen die Scherkräfte oft nur vom Magnetfeld, wie wir im Folgenden sehen werden.

Die Bewegungsgleichung III

Den Term $qn\vec{u}\times\vec{B} = \vec{j}\times\vec{B}$ in der Bewegungsgleichung kann mit dem Ampèreschen Gesetz[3] umgeschrieben werden in

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j} \quad \text{in} \quad \vec{j} \times \vec{B} \quad \text{einsetzen} \longrightarrow -\frac{1}{\mu_0}\left(\vec{B} \times \left(\vec{\nabla} \times \vec{B}\right)\right).$$

Einsetzen von $\vec{\nabla}(\vec{a} \cdot \vec{b}) = (\vec{a} \cdot \vec{\nabla})\vec{b} + (\vec{b} \cdot \vec{\nabla})\vec{a} + \vec{a} \times (\vec{\nabla} \times \vec{b}) + \vec{b} \times (\vec{\nabla} \times \vec{a})$ ergibt

$$\vec{j} \times \vec{B} = -\vec{\nabla}\left(\frac{B^2}{2\mu_0}\right) + \frac{1}{\mu_0}\left(\vec{B} \cdot \vec{\nabla}\right)\vec{B}. \tag{17}$$

[3] Wir werden später begründen, warum der Verschiebungsstrom vernachlässigt werden kann.

Die Bewegungsgleichung lautet nun

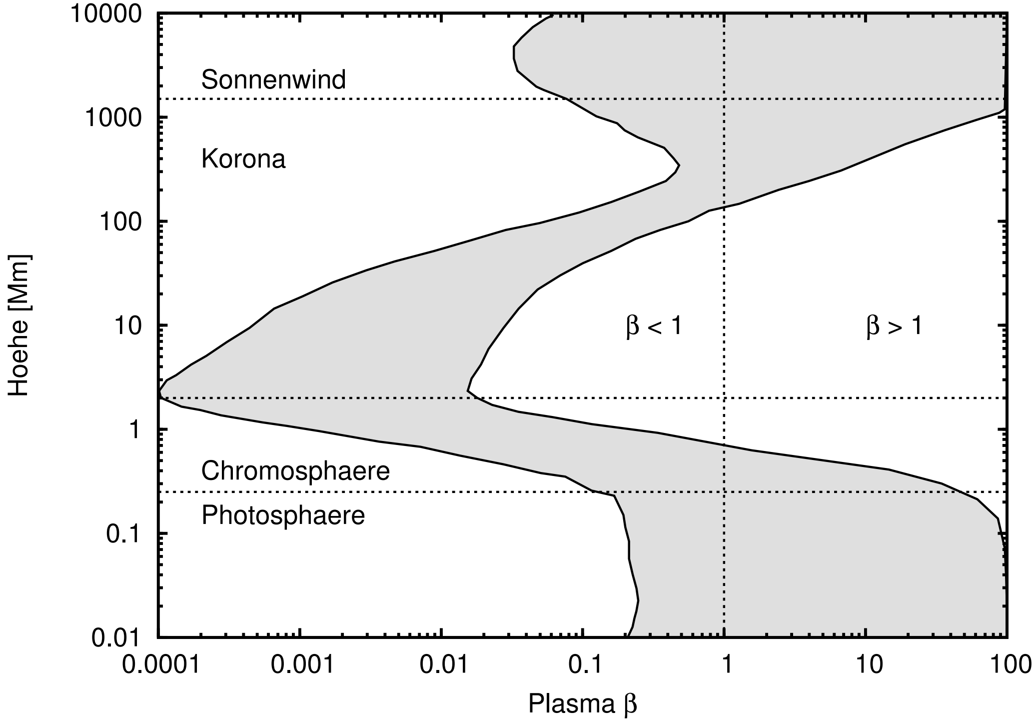
$$\frac{\partial \rho \vec{u}}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{u} \vec{u}) = -\vec{\nabla} \left(\frac{B^2}{2\mu_0} \right) + \frac{1}{\mu_0} \left(\vec{B} \cdot \vec{\nabla} \right) \vec{B} - \vec{\nabla} p + \vec{\nabla} \cdot \tau, \qquad (18)$$

wo der erste Term, $\vec{\nabla}(B^2/(2\mu_0)$ der Gradient des magnetischen Drucks ist und am besten mit dem Plasmadruck verglichen wird, was eine neue Plasmagröße definiert, das **Plasmabeta oder Plasma-**β:

$$\beta \doteq \frac{p}{(B^2/2\mu_0)} = \frac{2\mu_0 p}{B^2},$$

welches das Verhältnis von Plasmadruck zu magnetischem Druck angibt[4].

[4]Vergewissern Sie sich, dass $B^2/(2\mu_0)$ die Einheit eines Drucks (N/m^2), bzw. einer Energiedichte eV/m^3 hat.



Das Verhältnis $\beta \doteq (p)/(B^2/(2\mu_0))$ in der Sonnenatmosphäre ist links dargestellt[5]. In der Photosphäre dominiert der Gas- bzw. Plasmadruck, wie auch im Sonnenwind. Das Plasma in der Photosphäre und im Sonnenwind diktiert dem Magnetfeld, was es zu tun hat. In der Chromosphäre fällt β auf sehr kleine Werte, hier bestimmt das Magnetfeld die Dynamik und die Strukturen im Plasma. In der Korona beginnt β wieder zu steigen, sie ist aber fast überall noch durch das Magnetfeld dominiert.

[5] Nach Aschwanden, 2009

Der magnetische Spannungstensor

Man kann die Lorentzkraft also auch schreiben als Resultat des Spannungstensors. Integrieren wir den magnetischen Druck auch in diesem, so lautet er komponentenweise

$$\left[\left(\vec{\nabla} \times \vec{B}\right) \times \vec{B}\right]_i = \frac{\partial}{\partial x_k}\left(B_k B_i - \frac{1}{2} B^2 \delta_{ki}\right), \tag{19}$$

wo δ_{ik} das Kroneckerdelta ist und die Einsteinsche Summenkonvention über doppelt auftretende Indizes anzuwenden ist. Wir definieren nun den **magnetischen Spannungstensor** $\mathbf{M}$ komponentenweise

$$\mathbf{M}_{ij} \doteq \frac{1}{\mu_0}\left(\frac{1}{2} B^2 \delta_{ij} - B_i B_j\right). \tag{20}$$

Das Magnetfeld übt eine Kraft pro Volumen aus, die nach Glg. 19 gegeben ist durch die negative Divergenz von $\mathbf{M}$,

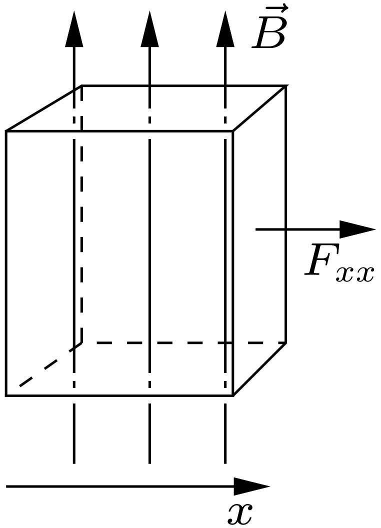
$$\frac{1}{\mu_0}\left(\vec{\nabla}\times\vec{B}\right)\times\vec{B} = -\vec{\nabla}\cdot\mathbf{M}.$$

Auf ein durch die Oberfläche S berandetes Volumen V wirkt also die Kraft

$$\vec{F}_V = \int_V \frac{1}{\mu_0}\left(\vec{\nabla}\times\vec{B}\right)\times\vec{B}\mathrm{d}V = -\int_V \vec{\nabla}\cdot\mathbf{M}\mathrm{d}V = -\oint_S \mathbf{M}\cdot\mathrm{d}\vec{S}, \qquad (21)$$

wo $\mathrm{d}\vec{S}$ nach außen zeige und wir den Satz von Gauß angewendet haben. Nach Newton III bewirkt dieses Volumen auf das umgebende Medium eine Kraft mit entgegengesetztem Vorzeichen. Die Kraft muss nicht unbedingt senkrecht zur Oberfläche wirken, ein magnetisiertes Plasma verhält sich ähnlich wie eine viskose Flüssigkeit in der Scher- und Spannungskräfte eine wichtige Rolle spielen.

Ein Beispiel:



Das Volumen links befinde sich in einem homogenen externen Magnetfeld $\vec{B}$, welches in die z-Richtung weise. Welche Kraft wirkt auf die in x-Richtung weisende Fläche? Nach Glg. 21 haben wir für die x-Komponente der Kraft pro Volumen auf die Fläche, die senkrecht auf der x-Richtung steht

$$F_{xx} = -\hat{\vec{x}} \cdot \mathbf{M}_x = -\hat{\vec{x}} \cdot \frac{1}{\mu_0}\left(\frac{1}{2}B^2\delta_{xx} - B_x B_x\right) = \frac{1}{2\mu_0}B^2\delta_{xx},$$

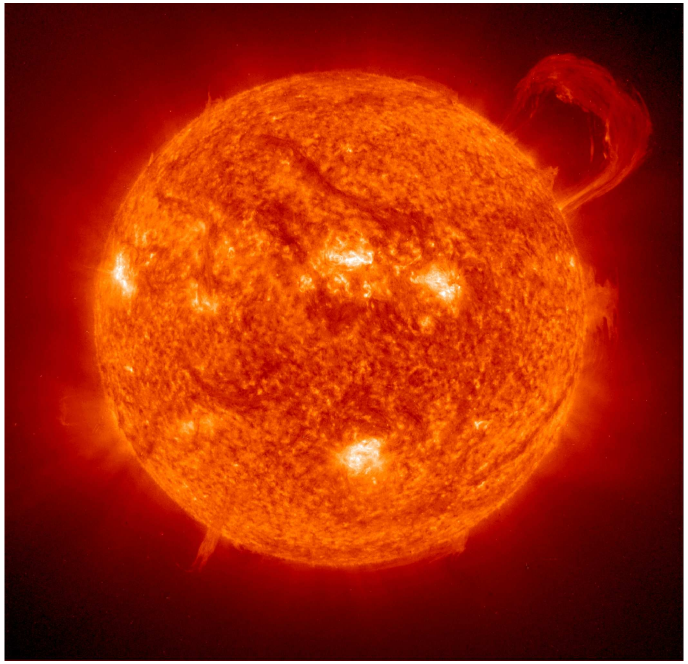
weil $B_x = 0$. Analog gilt $F_{xy} = F_{xz} = 0$, das Volumen wirkt senkrecht zum Magnetfeld eine Kraft nach **außen** aus. Am oberen Deckel wirkt die Kraft

$$F_{zz} = -\hat{\vec{z}} \cdot \mathbf{M}_z = -\hat{\vec{z}} \cdot \frac{1}{\mu_0}\left(\frac{1}{2}B^2\delta_{zz} - B_z B_z\right) = \frac{1}{2\mu_0}B^2\delta_{zz} \quad \text{und} \quad F_{zx} = F_{zy} = 0$$

die ebenso nach **außen** gerichtet ist. Wäre das Feld gekrümmt würde das Volumen versuchen sich entlang des Feldes gerade zu ziehen und senkrecht dazu auszudehnen, wie ein gespanntes Gummiseil. Deshalb nennt man den Tensor $\mathbf{M}$ auch Spannungstensor.

Ein Magnetfeld in einer leitenden Flüssigkeit verhält sich ähnlich wie ein elastisches und deformierbares Medium, allerdings anders, als wir das aus unserer Erfahrung kennen. Entlang eines gekrümmten Magnetfeldes wirkt eine magnetische Spannung, das Magnetfeld versucht sich entlang sich selbst gerade zu ziehen. Senkrecht zum Magnetfeld versucht es sich auszudehnen. Es verhält sich so, als ob es senkrecht zu sich selber komprimiert wäre und entlang sich selber unter Spannung stehen würde. Im hier gezeigten Beispiel wird man diesen Effekt aber nicht messen, weil die Kraft an den Deckeln durch das auf der anderen Seite weiterlaufende Magnetfeld gerade kompensiert wird. Die Spannung im Feld wird erst dann spürbar, wenn das Feld gekrümmt ist.

Ein Beispiel: Solare Prominenzen



Ein spektakuläres Beispiel für die Bedeutung der magnetischen Spannung liefern solare Prominenzen, wie rechts oben im Bild links abgebildet[6]. Diese können über Wochen stabil in der solaren Korona "herumhängen" und dann spontan ausbrechen. Man sieht sie sowohl im Licht von einfach ionisiertem Helium (He II, 304 nm, oben rechts), wie im Bild links, aber auch in Absorption durch neutrales He gegen die Sonnenscheibe (als sog. Filamente, z.B. unten rechts). Während ihrer ruhigen Phase werden sie durch die magnetische Spannung und den magnetischen Druck in der Korona gehalten.

[6]Bild: SOHO (ESA/NASA). Die Erde würde hier etwa in der Größe eines i-Punktes erscheinen.

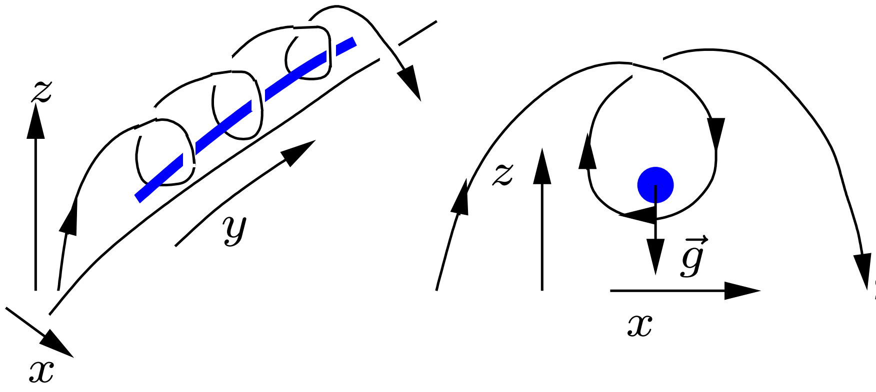
Die Bewegungsgleichung mit Gravitation lautet

$$\frac{\partial \rho \vec{u}}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{u}\vec{u}) = -\vec{\nabla} \cdot \mathbf{M} - \vec{\nabla} p + \rho \vec{g}, \tag{22}$$

wo wir den "normalen" Spannungstensor vernachlässigt haben. In der ruhigen Korona steht die Prominenz still, die linke Seite verschwindet. Über die Ausdehnung der Prominenz ist der Druckgradient so klein, dass wir ihn auch vernachlässigen. Damit muss die magnetische Spannung die Gravitation kompensieren

$$\vec{\nabla}\mathbf{M} = \rho \vec{g}.$$

Wir versuchen, die Situation möglichst zu vereinfachen, was in der folgenden Skizze schematisch dargestellt ist.



Die relevante Kraft ist natürlich die in die z-Richtung, das Integral entlang der y-Richtung wird diese Kräfte nur verstärken und wir kümmern uns deshalb nicht um diese Richtungskomponente, wie in der Skizze rechts angedeutet. Wir geben nun nur noch das Vorzeichen der B-Komponenten an.

$$
\begin{aligned}
F_z &= F_{xz} + F_{zz} = \frac{1}{\mu_0}\left[\frac{1}{2}B^2\delta_{xz} - B_x B_z + \frac{1}{2}B^2\delta_{zz} - B_z B_z\right], \\
&= \frac{1}{\mu_0}\left[-\underbrace{(B_x < 0)\,(B_z > 0)}_{\text{links}} - \underbrace{(B_x < 0)\,(B_z < 0)}_{\text{rechts}} - \frac{1}{2}B_{zz}^2\Big|_{\text{unten}}^{\text{oben}}\right],
\end{aligned}
$$

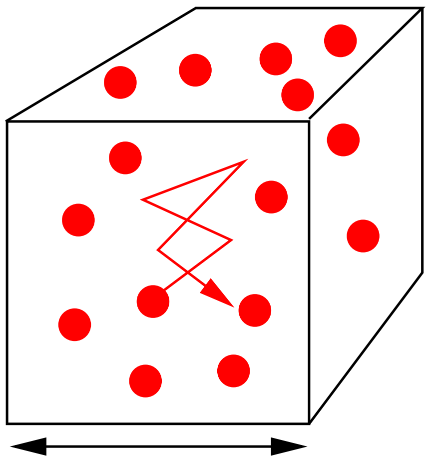
Netto ergibt sich also eine positive Kraft nach oben, welche die nach unten gerichtete Gravitation kompensieren muss:

$$\left| \frac{1}{\mu_0} \left[|B_x| \; |B_z| - |B_x| \; |B_z| - \frac{1}{2} B_{zz}^2 \Big|_{\text{unten}}^{\text{oben}} \right] \right| = |\rho g|$$

Einerseits führt die magnetische Spannung zu der nach oben gerichteten Kraft. Andererseits komprimiert das Gewicht der Prominenz das darunterliegende Magnetfeld und führt ebenso zu einer nach oben gerichteten Kraft. Deshalb können Prominenzen in der Korona scheinbar "schweben".

Ganz erklärt ist das Phänomen der Prominenzen/Filamente nicht. Warum sieht man sie denn auch in Absorption, was bei den verwendeten Linien nur mit neutralem Gas möglich ist? Die Prozesse der Ionisation/Rekombination und von Ladungsaustausch sind schnell genug, um das neutrale Gas an das Plasma zu binden. Während der Eruption sieht man es auf die Sonne zurückfallen.

Geltungsbereich der MHD



Wenn in einer typischen Zeitskala T zuviele Teilchen aus dem Volumen L^3 heraus gestreut werden, verliert es seine "Identität". Andererseits darf ein Plasma nur als Flüssigkeit behandelt werden, wenn in ihm genügend Stöße stattfinden. Wieviele sind gerade genug?
Ein Teilchen diffundiert im Plasma mit einer mittleren freien Weglänge λ und stößt mit einer Stoßfrequenz ν mit anderen Teilchen. Die mittlere Zeit zwischen zwei Stößen beträgt dann $\tau = 1/\nu$. Nach einer Zeit T hat es einen Weg l zurückgelegt,

$$l^2 = \frac{T}{\tau}\lambda^2 \approx T v_{\mathrm{th}} \lambda \quad \Longrightarrow \text{Behandlung als Flüssigkeit wenn} \quad l^2 \ll L^2,$$

also wenn gilt $v_{\mathrm{th}}\lambda \ll L^2/T$ bzw. $\nu \ll 1/T$ und $\lambda \ll L$.