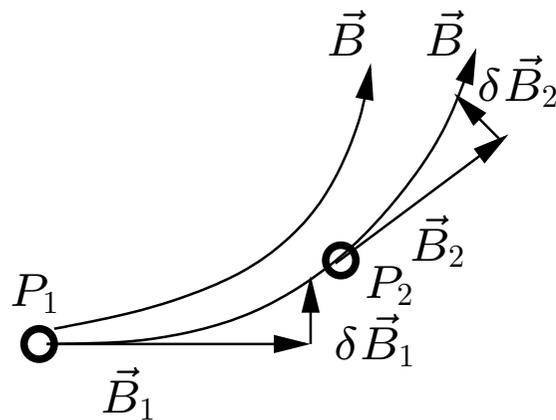


Was bedeutet $(\vec{B} \cdot \vec{\nabla})\vec{B}$?



Das Feld \vec{B} kann sich entlang von \vec{B} auf zwei Arten ändern:

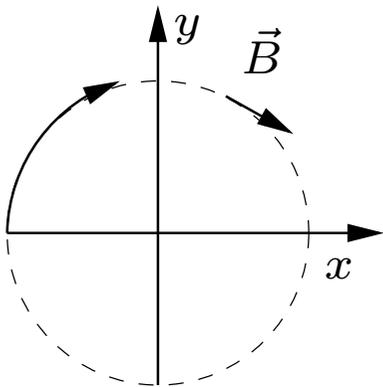
- 1) Im Punkt P_1 ist das Feld stärker als bei P_2 , das Feld nimmt entlang von \vec{B} ab.
- 2) Das Feld ändert seine Richtung, es ist gekrümmt.

$(\vec{B} \cdot \vec{\nabla})$ ist ein skalarer Differentialoperator

$$(\vec{B} \cdot \vec{\nabla})\vec{B} = \left(B_x \frac{\partial}{\partial x} + B_y \frac{\partial}{\partial y} + B_z \frac{\partial}{\partial z} \right) \vec{B}$$

und gibt die Änderung von \vec{B} entlang von \vec{B} an, genau wie auf Seite 12 in P6_V4 für die Flüssigkeitströmung in einer Dimension beschrieben. Allgemein gibt $(\vec{a} \cdot \vec{\nabla})\vec{b}$ die Veränderung von \vec{b} entlang von \vec{a} an. $(\vec{a} \cdot \vec{\nabla})$ ist die Projektion von $\vec{\nabla}$ auf den Vektor \vec{a} .

Übung: Berechnen Sie $(\vec{B} \cdot \vec{\nabla})\vec{B}$ für das Vektorfeld links (z. B. das Magnetfeld eines geraden stromdurchflossenen Leiters),



$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad (\vec{B} \cdot \vec{\nabla}) = \left(B_x \frac{\partial}{\partial x} + B_y \frac{\partial}{\partial y} \right).$$

Zeigen Sie, dass mit $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ gilt

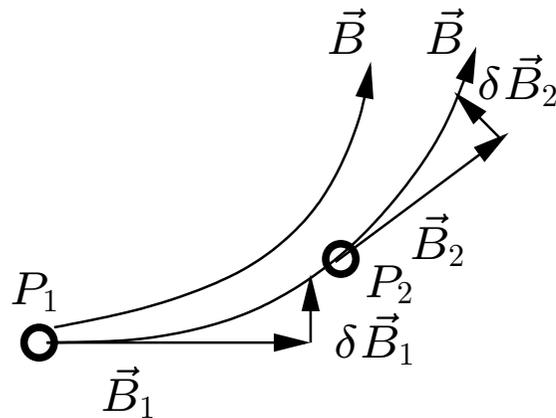
$$(\vec{B} \cdot \vec{\nabla}) \vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \left(B_x \frac{\partial}{\partial x} + B_y \frac{\partial}{\partial y} \right) \left(\begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix} \frac{1}{r} \right) = \left(\frac{\mu_0 I}{2\pi} \right)^2 \frac{1}{r} \begin{pmatrix} -x \\ -y \end{pmatrix},$$

was senkrecht auf \vec{B} steht und zum Krümmungszentrum zeigt.

Wir stellen für später noch den in P6_V4 erläuterten Ausdruck für die Lorentzkraft bereit:

$$\vec{j} \times \vec{B} = -\vec{\nabla} \left(\frac{B^2}{2\mu_0} \right) + \frac{1}{\mu_0} \left(\vec{B} \cdot \vec{\nabla} \right) \vec{B}. \quad (1)$$

Was bedeutet $(\vec{B} \cdot \vec{\nabla})\vec{B}$? II



Wir schreiben nun $\vec{B} = |\vec{B}|\vec{b}$ und parametrisieren $\vec{b} = \vec{b}(t)$. Wir stellen uns vor, dass wir mit Einheitsgeschwindigkeit \vec{b} entlang der Kurve \vec{B} fahren. Ist diese gekrümmt, erfahren wir eine Beschleunigung $\dot{\vec{b}}$, die senkrecht auf \vec{b} steht. Diese entspricht der **Krümmung** der Kurve, $\kappa \doteq |\dot{\vec{b}}|$, welche invers proportional zum Krümmungsradius R ist, $\kappa = 1/R$. $\vec{\kappa} \doteq \vec{b} \cdot \vec{\nabla}\vec{b}$ ist der **Krümmungsvektor**, der von der Kurve zum Krümmungszentrum zeigt, $\vec{\kappa} = -\vec{R}/R^2$.

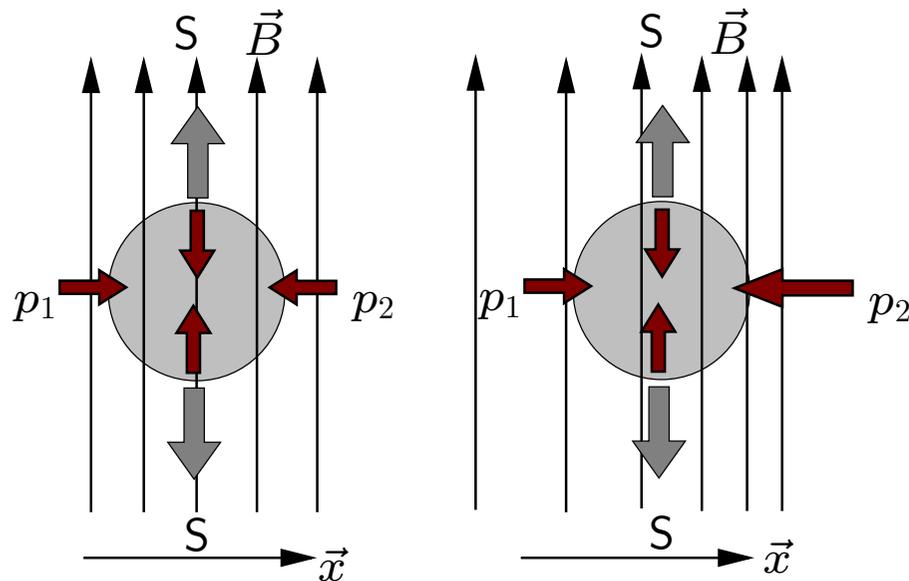
$$\vec{B} \cdot \vec{\nabla}\vec{B} = |\vec{B}|\vec{b} \cdot \vec{\nabla} (|\vec{B}|\vec{b}) = |B|^2\vec{b} \cdot \vec{\nabla}\vec{b} + \vec{b}\vec{b} \cdot \vec{\nabla}|B|^2/2.$$

Und nochmals die Lorentzkraft $\vec{j} \times \vec{B} = (1/\mu_0)(\vec{\nabla} \times \vec{B}) \times \vec{B}$

Wir betrachten nochmals den Spannungsterm in der Lorentzkraft und drücken das Magnetfeld aus mit $\vec{B} = B\hat{b}$, wo \hat{b} der in Richtung \vec{B} zeigende Einheitsvektor sei. Die Spannung kann nun geschrieben werden als

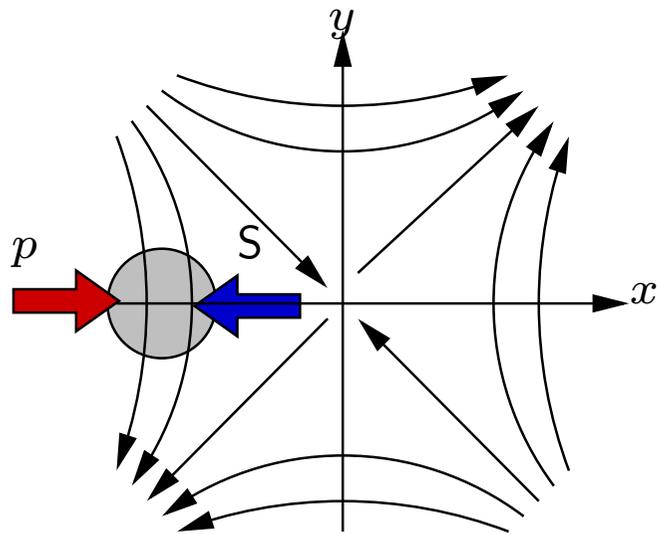
$$\frac{1}{\mu_0} (\vec{B} \cdot \vec{\nabla}) \vec{B} = \frac{B}{\mu_0} \frac{d}{db} (B\hat{b}) = \frac{B}{\mu_0} \frac{dB}{db} \hat{b} + \frac{B^2}{\mu_0} \frac{d\hat{b}}{db} = \frac{d}{db} \left(\frac{B^2}{2\mu_0} \right) \hat{b} + \frac{B^2}{\mu_0} \frac{\vec{n}}{R_c}, \quad (2)$$

wo \vec{n} der Hauptnormalenvektor auf die Feldlinie \vec{B} und R_c deren lokaler Krümmungsradius sind. Die Lorentzkraft scheint also zwei Komponenten aufzuweisen, eine entlang des Feldes ($\parallel \hat{b}$) und eine senkrecht dazu ($\parallel \vec{n}$). Die erste Komponente kompensiert aber gerade den feldparallelen Anteil von $\vec{\nabla}(B^2/(2\mu_0))$ in Glg. 1. Klar, die Lorentzkraft wirkt ja senkrecht auf \vec{B} .



Die Lorentzkraft wirkt also auf zwei Arten. Einerseits verkürzt die Spannung die Feldlinien, andererseits komprimiert sie ein Plasma durch den magnetischen Druck. Die beiden Situationen links unterscheiden sich durch einen nicht-homogenen magnetischen Druck, der rechts mit \vec{x} z. B. exponentiell zunimmt. Die Spannung S ist in beiden Beispielen gleich, der Druck (rote Pfeile)

unterscheidet sich aber. Im inhomogenen Bsp. erfährt das Plasmapaketeine Kraft nach links. Im homogenen Feld links verschwindet die Stromdichte wie erwartet und es wirkt netto keine Lorentzkraft. Rechts, mit $\vec{B} = B_0 \exp(x)\vec{y}$ ist die Stromdichte $\vec{j} = (dB_y/dx)\vec{z}/\mu_0 = B_0 \exp(x)\vec{z}/\mu_0$ und die Lorentzkraft nach Glg. 1 $\vec{j} \times \vec{B} = -B_0^2 \exp(2x)\vec{x}/\mu_0$. In beiden Situationen ist $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} =$ erfüllt.



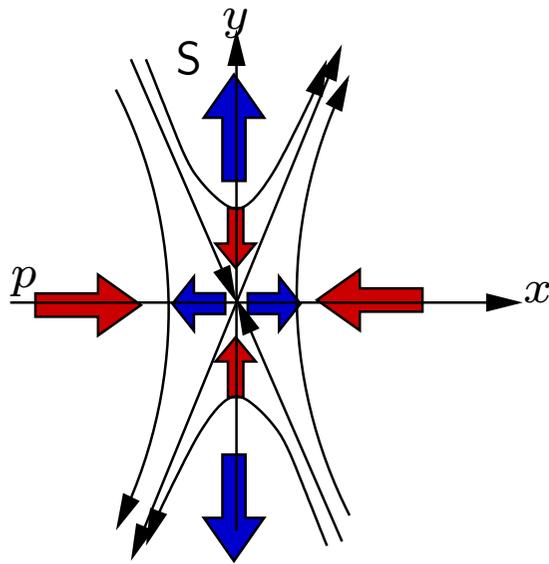
Ein weiteres Beispiel ist der magnetisch neutrale sog. **X-Punkt**¹, wo $\vec{B} = y\hat{x} + x\hat{y}$. Dieses Feld ergibt sich aus der Bedingung $dy/dx = B_y/B_x = x/y$, die Feldlinien liegen auf Hyperbeln $y^2 - x^2 = \text{const.}$ Überzeugen Sie sich selber, dass $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$!

Die Feldlinien sind nach außen gekrümmt, die Spannung drückt deshalb nach außen (blauer Pfeil), in die Richtung, in die das Feld zunimmt. Wegen der Zunahme des Feldes nach außen wirkt ein magnetischer

Druck nach innen (roter Pfeil), der in dieser Konfiguration die Spannungskraft auf ein Plasmaket (grauer Kreis) gerade kompensiert.

Übung 1. Zeigen Sie mit Glg. 1 und 2, dass für diese X-Punkt-Geometrie $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$ und dass die Druckkraft gerade die Spannungskraft kompensiert!

¹In drei Dimensionen eine sog. **Neutrallinie**.



Als letztes Beispiel verformen wir den X-Punkt von Seite 7 wie links gezeigt, wo $\vec{B} = y\vec{x} + \alpha^2 x\vec{y}$ und $\alpha^2 > 1$. Die Feldlinien liegen jetzt auf Hyperbeln $y^2 - \alpha^2 x^2 = \text{const}$. Sie sind unterschiedlich nach außen gekrümmt, die Spannung drückt in x -Richtung weniger nach außen (blauer Pfeil), als die Druckkraft nach innen (roter Pfeil). In y -Richtung sind die Feldlinien viel stärker gekrümmt, die Feldstärke nimmt aber zu wenig zu, um die Spannungskraft zu kompensieren. Diese Anordnung tritt bei der sog. **magnetischen Rekonnektion** auf, die wir später behandeln werden.

Man kann zeigen, dass bereits der auf Seite 7 gezeigte X-Punkt ($\alpha^2 = 1$) nicht stabil ist (Dungey, Phil. Mag., **44**, 725-738, (1953)). Eine kleine Störung in dessen Feld führt dazu, dass es sich in ein Feld des deformierten ($\alpha^2 > 1$) X-Punktes verformt und α zunimmt.

Die Energiegleichung

Die Kontinuitätsgleichung kann als Erhaltungsgleichung für die Masse (Dichte) angesehen werden, die Bewegungsgleichung als Erhaltungsgleichung für die Impulsdichte. Sie lauten

$$\begin{aligned}\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{u}) &= 0, \\ \frac{\partial \rho \vec{u}}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{u} \vec{u}) &= -\vec{\nabla} \cdot \mathbf{M} - \vec{\nabla} p + \sum_i \vec{F}_i,\end{aligned}$$

wo in der Bewegungsgleichung mögliche weitere Kräfte durch $\sum \vec{F}_i$ zusammengefasst sind. In der Kontinuitätsgleichung kommt die 'bulk'-Geschwindigkeit \vec{u} vor, die eigentlich erst durch die Bewegungsgleichung bestimmt wird. In der Bewegungsgleichung kommt der Druck- und Spannungstensor vor, der eigentlich

erst durch eine weitere Gleichung, die Energiegleichung, bestimmt werden muss, denn die Temperatur, die im allereinfachsten Fall mit $p = nk_B T$ eingeht, ist eine thermodynamische Größe.

In konservativer Form erwarten wir also eine Gleichung mit der folgenden Struktur

$$\left(\begin{array}{c} \text{zeitliche} \\ \text{Änderungsrate} \\ \text{der Energie} \end{array} \right) + \vec{\nabla} \cdot \left(\begin{array}{c} \text{Energie-} \\ \text{fluss} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} \text{Energie-} \\ \text{zufuhrtrate} \\ \sum \dot{Q} \end{array} \right) + \left(\begin{array}{c} \text{Rate der} \\ \text{geleisteten} \\ \text{Arbeit } \sum \dot{W} \end{array} \right)$$

Hier müssten die Größen auf der rechten Seite, die Energiezufuhrtrate und die Rate der geleisteten Arbeit, durch eine nächsthöhere Gleichung bestimmt werden.

Diese Hierarchie, in der Größen in einer Gleichung auftauchen, die erst aus der nächsthöheren Gleichung folgen, endet nicht mit der Energiegleichung, wie man zeigen kann². In der Energiegleichung ihrerseits kommt z.B. der Wärmefluss

²Formal kann man die Gleichungen aus der Boltzmann- oder Vlasovgleichung durch Momentenbildung herleiten.

(Energiezufuhr oder -verlust) vor, der durch eine Gleichung bestimmt würde, die man aus noch höheren Momenten der Boltzmann- oder Vlasovgleichung herleiten müsste. Diese unendliche Hierarchie muss irgendwie aufgelöst werden, am besten durch physikalische Einsichten. Nur so lässt sich das System von Gleichungen schließen.

Die Kontinuitätsgleichung folgt aus dem nullten Moment, die Bewegungsgleichung aus dem ersten Moment, etc.

Trotzdem: Herleitung der Energiegleichung

Der erste Hauptsatz der Thermodynamik (1HSTD) besagt, dass

$$dU = \delta Q - \delta W + \sum_i \mu_i dN_i, \quad (3)$$

wo der letzte Term in einem chemisch inerten Plasma verschwindet. Der 1HSTD besagt also, dass die innere Energie U sich dadurch ändern kann, dass einem Plasma Wärme (δQ) beigefügt wird, oder an ihm Arbeit (δW) verübt wird. Mit

$$\delta Q = TdS \quad \text{und} \quad \delta W = pdV \quad \text{und} \\ d(\rho V) = dm = 0 \longrightarrow dV = -\frac{V}{\rho}d\rho \quad \text{und so} \quad \delta W = p \cdot dV = -p\frac{V}{\rho}d\rho$$

haben wir die bekannte Form

$$dU = TdS - pdV = TdS + p\frac{V}{\rho}d\rho.$$

Multiplikation mit ρ ergibt

$$\rho dU - m\frac{p}{\rho} d\rho = \rho T dS.$$

Nun dividieren wir noch durch die Masse m , welche ja konstant ist, und erhalten einen Ausdruck für die zeitliche Änderung der inneren Energie pro Masse, $e \doteq U/m$ als Funktion der zeitlichen Änderung der Entropie pro Masse, $s \doteq S/m$,

$$\rho \frac{de}{dt} - \frac{p d\rho}{\rho dt} = \rho T \frac{ds}{dt} = -\mathcal{L}, \quad (4)$$

wo \mathcal{L} die **Energieverlustfunktion** ist, die den Nettoeffekt aller Quellen und Senken von Wärme beschreibt.

Wir sehen also schon zwei Möglichkeiten, die Energiegleichung zu schreiben:

$$\rho \frac{de}{dt} - \frac{p d\rho}{\rho dt} = -\mathcal{L}, \quad \text{oder auch} \quad \rho T \frac{ds}{dt} = -\mathcal{L}, \quad (5)$$

Wenden wir nun auch die Kontinuitätsgleichung in nicht-konservativer Form

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0$$

auf Glg. 5a an, so erhalten wir

$$\rho \frac{de}{dt} + p \vec{\nabla} \cdot \vec{v} = -\mathcal{L}. \quad (6)$$

Diese Version der Energiegleichung sagt uns, dass in einem mitbewegten Plasma-paket in einem inkompressiblen Medium (also wenn $\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0$) die innere Energie vollständig durch die Energieverlustfunktion bestimmt wird. Ist das Medium kompressibel, so kann das Plasmapakete auch durch Kompression oder Expansion Energie gewinnen oder verlieren.

Mit den Beziehungen für ein ideales Gas

$$p = nk_B T, \quad e = c_V T, \quad c_p = c_V + \frac{k_B}{m}, \quad \gamma \doteq \frac{c_p}{c_v}, \quad \text{und folglich}$$

$$c_p = \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{k_B}{m}, \quad c_V = \frac{1}{\gamma - 1} \frac{k_B}{m}, \quad e = \frac{p}{\rho(\gamma - 1)}$$

lässt sich die Energiegleichung in vielen verschiedenen Formen schreiben.

Und wie schließt man das System?

Die einfachste Art, dieses System zu schließen ist durch Annahme, dass im Plasma eine Zustandsgleichung gelte, die den Druck bestimmt und die Energiegleichung unnötig macht. Diese Zustandsgleichung unterscheidet sich für ein isotropes und ein anisotropes Plasma. In einem anisotropen Plasma muss der Druck als Tensor Π ausgedrückt werden, im isotropen Fall können wir den Drucktensor besonders einfach schreiben,

$$\Pi = p \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Hierfür ist nur eine Zustandsgleichung nötig; im allereinfachsten Fall eines isothermen Plasmas $T = \text{const.}$ haben wir

$$p = nk_B T.$$

Solche Situationen treten auf, wenn das System sich nur sehr langsam ändert und immer genug Zeit hat, dass die Energie im Plasma so verteilt werden kann, dass überall dieselbe Temperatur herrscht. Die globale Magnetosphäre ist ein gutes Beispiel dafür. In diesem Fall gilt $T = T_0 = \text{const.}$, und der Druck wird mit $p_0 n k_B T$ proportional zur Dichte. Damit wird das System geschlossen und ist lösbar.

Im anderen Extrem, in einem Plasma, welches sich so schnell ändert, dass kein Wärmeaustausch möglich ist ($\delta Q = 0$) sind die Zustandsänderungen adiabatisch. Um diese zu beschreiben, nehmen wir die Energiegleichung zu Hilfe (die wir ja rauswerfen wollen). Mit $e = c_V T = k_B / (m(\gamma - 1)) T$ erhalten wir für Glg. 6

$$\underbrace{\frac{3}{2} n k_B \left(\frac{\partial T}{\partial t} + \vec{u} \cdot \vec{\nabla} T \right)}_{\text{substantielle Ableitung}} + p \vec{\nabla} \cdot \vec{u} = \underbrace{-\vec{\nabla} \cdot \vec{q}}_{\text{Wärmezufuhr}} - \underbrace{\left(\Pi \cdot \vec{\nabla} \right) \cdot \vec{u}}_{\text{Arbeit}} + \dots,$$

wo \vec{q} der Wärmefluss und Π der Druck- und Spannungstensor ist und setzen die rechte Seite, die den Wärmeaustausch beschreibt, gleich Null. Aus der Kontinuitätsgleichung erhalten wir einen Ausdruck für die Divergenz der Geschwindigkeit,

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (n\vec{u}) = 0 \longrightarrow n\vec{\nabla} \cdot \vec{u} = -\frac{\partial n}{\partial t} - \vec{u} \cdot (\vec{\nabla}n) = -\frac{dn}{dt}$$

und setzen ihn in die Energiegleichung ein:

$$\frac{3}{2}nk_B \left(\frac{\partial T}{\partial t} + \vec{u} \cdot \vec{\nabla}T \right) - \frac{p}{n} \frac{dn}{dt} \longrightarrow \frac{3}{2}nk_B \frac{dT}{dt} - k_B T \frac{dn}{dt} = 0.$$

In anderen Worten,

$$n \frac{dT}{dt} = \frac{2}{3} T \frac{dn}{dt} \longrightarrow \frac{dT}{T} = \frac{2}{3} \frac{dn}{n}$$

Integration liefert

$$T = T_0 \left(\frac{n}{n_0} \right)^{2/3} \quad \text{bzw.} \quad p = nk_B T = n_0 k_B T_0 \left(\frac{n}{n_0} \right)^{5/3} = p_0 \left(\frac{n}{n_0} \right)^{5/3},$$

wo $5/3 = c_p/c_v = \gamma$ der sog. **Adiabatindex** ist, der in einem stoßfreien idealen Plasma konstant ist. Er heißt oft auch **Polytropenindex**, der auch anderes Verhalten beschreiben kann, wie z. B. isobare Zustandsänderungen, wo $\gamma = 0$, oder isotherme, wo $\gamma = 1$. Wir haben also jetzt den Druck direkt durch die Dichte ausgedrückt und brauchen die Temperatur und die Energiegleichung nicht mehr! Hat das Flüssigkeitspaket keinen Austausch mit der Umgebung bleibt pV^γ entlang der Bewegung konstant und die Energiegleichung wird ersetzt durch

$$p = p_0 \left(\frac{n}{n_0} \right)^\gamma, \quad \text{bzw.} \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{p}{n^\gamma} \right) = 0 \quad \text{wegen} \quad pV^\gamma = \frac{p}{n^\gamma} = \text{const.} \quad (7)$$

Wärmeleitung

Auf der rechten Seite der Energiegleichung stehen die Verlust- und Quellterme wie Wärmeleitung $\vec{\nabla} \cdot \vec{q}$, Strahlungsverluste L_r , Ohmsche Dissipation j^2/σ oder andere Heizquellen F_H ,

$$\frac{3}{2}nk_B \frac{dT}{dt} + p\vec{\nabla} \cdot \vec{u} = -\vec{\nabla} \cdot \vec{q} - L_r + j^2/\sigma + F_H = -\mathcal{L}. \quad (8)$$

Der Wärmefluss ist $\vec{q} = -\kappa \vec{\nabla} T$, wo κ der Wärmeleitungstensor ist. Ähnlich wie die elektrische Leitfähigkeit ist auch die Wärmeleitfähigkeit in einem (magnetisierten) Plasma richtungsabhängig. Es ist deshalb sinnvoll, die Divergenz der Wärmeflusses $\vec{\nabla} \cdot \vec{q}$ in einen parallelen und einen senkrechten Teil aufzuspalten.

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{q} = -\vec{\nabla} \kappa \vec{\nabla} T = - \left[\vec{\nabla}_{\parallel} \cdot \left(\kappa_{\parallel} \vec{\nabla}_{\parallel} T \right) + \vec{\nabla}_{\perp} \cdot \left(\kappa_{\perp} \vec{\nabla}_{\perp} T \right) \right].$$

Die Wärmeleitung entlang des Magnetfeldes geschieht hauptsächlich durch die mobilen Elektronen und beträgt nach Spitzer (1962) in einem vollständig ionisierten Plasma

$$\kappa_{\parallel} = \kappa_0 T^{5/2} = 1.8 \cdot 10^{-10} \frac{T^{5/2}}{\ln \Lambda} \text{ W m}^{-1} \text{ K}^{-1}. \quad (9)$$

Die Wärmeleitung senkrecht zum Magnetfeld geschieht hauptsächlich durch die Ionen weil sie einen größeren Gyrationradius haben. Stoßen sie auf einer Gyration mit einem anderen Ion, so tauschen übertragen sie Energie und leiten die Wärme. Die Wärmeleitung senkrecht zu \vec{B} geht also mit

$$\Omega_i \tau_{ii} = 1.63 \cdot 10^{15} \frac{BT^{3/2}}{n \ln \Lambda}, \quad (10)$$

wo B in Tesla einzusetzen ist. Spitzer (1962) gibt ein Verhältnis von

$$\frac{\kappa_{\perp}}{\kappa_{\parallel}} = 2 \cdot 10^{-31} \frac{n^2}{T^3 B^2}$$

an. Für hohe Temperaturen in "normalen" Plasmen ist die senkrechte Wärmeleitfähigkeit also vernachlässigbar und wir können die Wärmeleitung entlang der Feldlinie schreiben als

$$\vec{\nabla}_{\parallel} \cdot \left(\kappa_{\parallel} \vec{\nabla}_{\parallel} T \right) = \left(\frac{d}{ds} \right) \left(\kappa_{\parallel} \frac{dT}{ds} \right) - \underbrace{\left(\frac{\kappa_{\parallel}}{B} \right) \frac{dB}{ds} \frac{dT}{ds}}_{\text{Änderung von B}} \stackrel{\text{oder}}{=} \frac{1}{A} \frac{d}{ds} \left(\kappa_{\parallel} \frac{dT}{ds} A \right),$$

wo s die Distanz entlang der Feldlinie und A die Querschnittsfläche der Flussröhre sei (wo also $(d/ds)(BA) = 0$). Der zweite Term im mittleren Ausdruck wird gebraucht weil sich \vec{B} entlang von \vec{B} ja ändert.

Strahlung

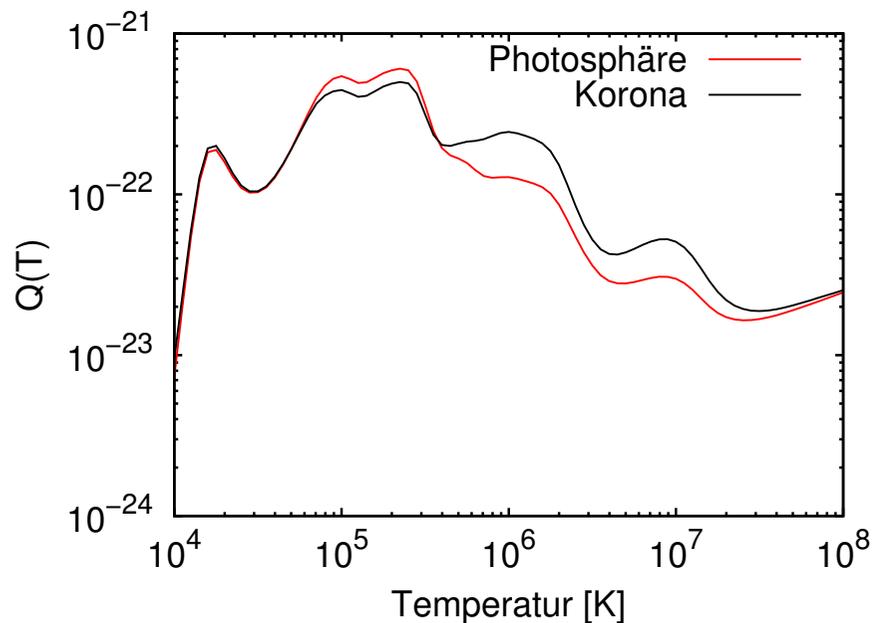
Ein Plasma kann Strahlung absorbieren (durch Ionisation³) und so geheizt werden oder auch Strahlung emittieren und so abkühlen. In einem **optisch dichten** Plasma (wie z.B. im Sonneninnern) ist der Strahlungstransport durch die Divergenz des Strahlungsflusses \vec{q}_r gegeben, $\mathcal{L} = \vec{\nabla} \cdot \vec{q}_r$. Dieser wiederum ist gegeben durch $\vec{q}_r = -\kappa_r \vec{\nabla} T$, wo $\kappa_r = 16\sigma_s T^3 / (3\tilde{\kappa}\rho)$. Dabei ist σ_s die Stefan-Boltzmann-Konstante und $\tilde{\kappa}$ die sog. **Opazität** oder der Massenabsorptionskoeffizient, $\tilde{\kappa}\rho$ ist der Absorptionskoeffizient. Die Opazität hängt empfindlich von der Zusammensetzung des Plasmas und von der Wellenlänge ab.

Ist der Strahlungstransport isotrop, so verwendet man besser die thermische Diffusivität $\kappa = \kappa_r / (cc_p)$. Bei konstantem Druck ergibt sich dann die Wärmeleitungsgleichung

$$\frac{dT}{dt} = \kappa \vec{\nabla}^2 T,$$

³Ein vollständig ionisiertes Wasserstoffplasma absorbiert nicht.

die Wärmeleitung oder der Strahlungstransport kann in diesem Fall also als diffusiver Prozess aufgefasst werden.



recht komplexes Verhalten, wie man links⁴ sieht.

In einem **optisch dünnen** Plasma nimmt der Strahlungstransport eine andere Form an,

$$\mathcal{L}_r = n_e n_H Q(T),$$

wo n_e die Elektronendichte und n_H die Protonen- oder Wasserstoffdichte ist. Die Funktion $Q(T)$ hängt nicht nur von der Temperatur ab, sondern auch wieder von der Zusammensetzung. Sie zeigt ein Maximum bei ca. $2 \cdot 10^5$ K, aber sonst ein

⁴Ich danke Dr. Heidrich-Meisner für die CHIANTI-Daten für diese Abbildung.

Zwischenbilanz

Bisher haben wir die Kontinuitätsgleichung, die Bewegungsgleichung und, als Ersatz für die Energiegleichung, die Polytropengleichung hergeleitet.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{u}) = 0 \quad \text{und} \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{p}{n^\gamma} \right) = 0,$$
$$\frac{\partial \rho \vec{u}}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{u} \vec{u}) = \vec{j} \times \vec{B} - \vec{\nabla} \cdot \Pi + \sum_i \vec{F}_i,$$

\vec{j} und \vec{B} in der Bewegungsgleichung koppeln an die Maxwellgleichungen:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}, \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0,$$
$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad \vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}.$$

Die Gleichungen der idealen Magnetohydrodynamik

Wir können nun endlich alle Gleichungen der idealen MHD angeben

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{u}) = 0,$$

$$\frac{\partial \rho \vec{u}}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{u} \vec{u}) = -\frac{1}{\mu_0} \left(\vec{B} \times (\vec{\nabla} \times \vec{B}) \right) - \vec{\nabla} \cdot \Pi + \sum_i \vec{F}_i,$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{p}{n^\gamma} \right) = 0,$$

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} - \vec{\nabla} \times (\vec{u} \times \vec{B}) = 0, \quad \text{mit den Anfangsbedingungen}$$

$$\rho_0(\vec{x}) = \rho(\vec{x}, t = 0), \quad p_0(\vec{x}) = p(\vec{x}, t = 0), \quad \vec{v}_0(\vec{x}) = v(\vec{x}, t = 0), \quad \text{und}$$

$$\vec{B}_0(\vec{x}) = \vec{B}(\vec{x}, t = 0), \quad \text{und} \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0.$$

Die Gleichungen der idealen MHD in konservativer Form*

Als Erhaltungsgröße ist die innere Energie e besser geeignet als $p = (\gamma - 1)\rho e$.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{u}) = 0,$$

$$\frac{\partial \rho \vec{u}}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \left[(\rho \vec{u} \vec{u}) + \left(p + \frac{1}{2} B^2 \right) \mathbf{I} - \vec{B} \vec{B} \right] = -\rho \vec{\nabla} \Phi,$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \rho u^2 + \rho e + \frac{1}{2\mu_0} B^2 \right) + \vec{\nabla} \cdot \left[\left(\frac{1}{2} \rho u^2 + \rho e + p + \frac{1}{2\mu_0} B^2 \right) \vec{u} - \vec{u} \cdot \vec{B} \vec{B} \right] = -\rho \vec{u} \cdot \vec{\nabla} \Phi,$$

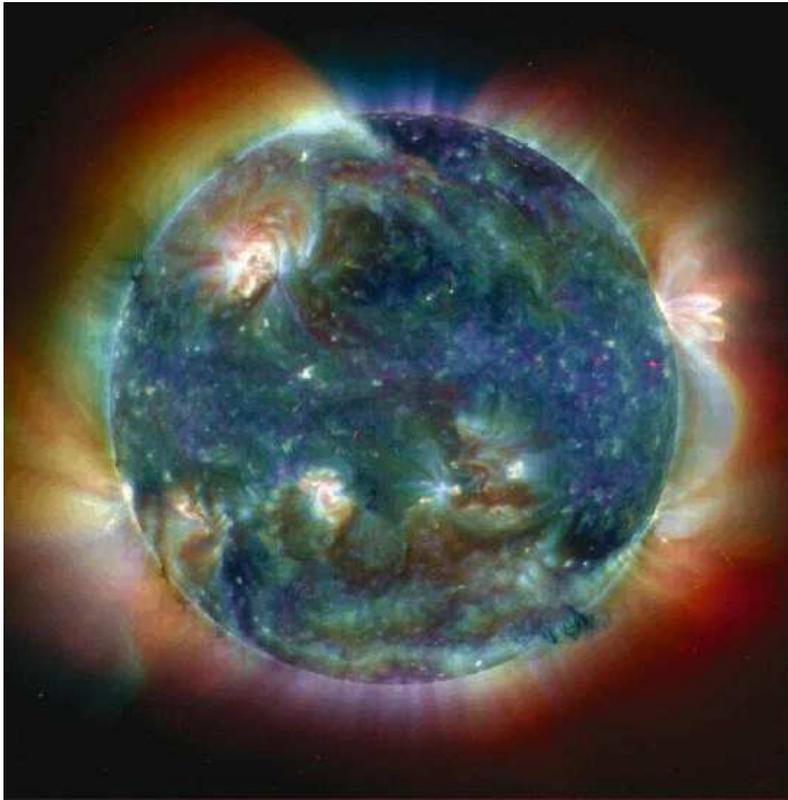
$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\vec{u} \vec{B} - \vec{B} \vec{u}) = 0,$$

wo z.B. $-\vec{\nabla} \Phi = \vec{g}$ und mit den auf Seite 26 gegebenen Anfangsbedingungen.

Beispiele für die Behandlung der Energiegleichung

Wie wir gesehen haben, ist die Energiegleichung die Schwierigkeit in jeder MHD-Behandlung eines komplexen Plasmas, wie z.B. der Korona. Im Folgenden werden wir einige Beispiele untersuchen, die sich durch die Heizung (rechte Seite der Energiegleichung) unterscheiden.

Heizung der Korona

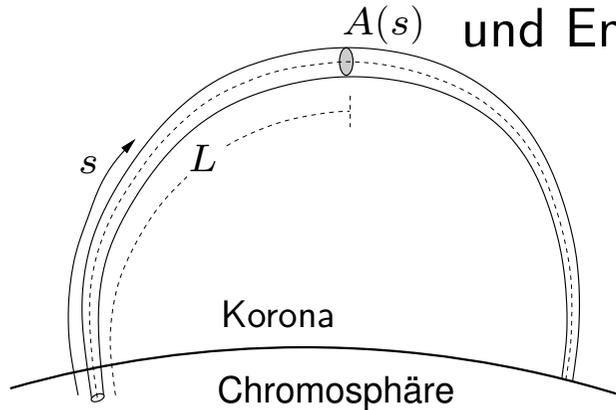


Die Temperatur der Photosphäre liegt bei ca. 6000 K oder sogar nur bei 4800 K in Sonnenflecken. Als Edlén und Grotrian 1943 die "Koronium" und andere unbekannte Linien in der Korona als von Fe IX und Ca XIV stammend identifizierten, war klar, dass die Korona⁵ über eine Million K heiß sein muss. Das koronale Heizproblem war geboren. Was macht den Topf heißer als die Platte? Wir kennen heute, über 70 Jahre nach der Entdeckung des Problems, noch keine eindeutige Antwort darauf.

⁵Im Bild sind die 171Å-Linie von Fe IX blau, die Fe XII - 195Å-Linie grün und die Fe XV 284Å-Linie rot dargestellt. Sie entstehen bei 1, 1.5 und 2 MK. Quelle: SOHO/EIT

Heizung einer Schleife

Die Schleife muss die Kontinuitäts-, Impuls- (Bewegungs-) und Energiegleichungen erfüllen (Seite 26 oder 27):



$$\frac{\partial n}{\partial t} + \frac{1}{A} \frac{\partial}{\partial s} (nvA) = 0, \quad (11)$$

$$mn \frac{\partial v}{\partial t} + mnv \frac{\partial v}{\partial s} = -\frac{\partial p}{\partial s} + \frac{\partial p_{\text{grav}}}{\partial r} \left(\frac{\partial r}{\partial s} \right), \quad (12)$$

$$mn \frac{\partial e}{\partial t} + \frac{mnv}{A} \frac{\partial eA}{\partial s} + \frac{p}{A} \frac{\partial v}{\partial s} = E_H(s) - E_R(s) - \frac{1}{A} \frac{\partial (F_C A)}{\partial s} \quad (13)$$

wo E_H die Heizrate, E_R die Strahlungsverlustrate und F_C der Wärmefluss sind. Spitzer und Härms haben 1953 gezeigt, dass F_C geschrieben werden kann als

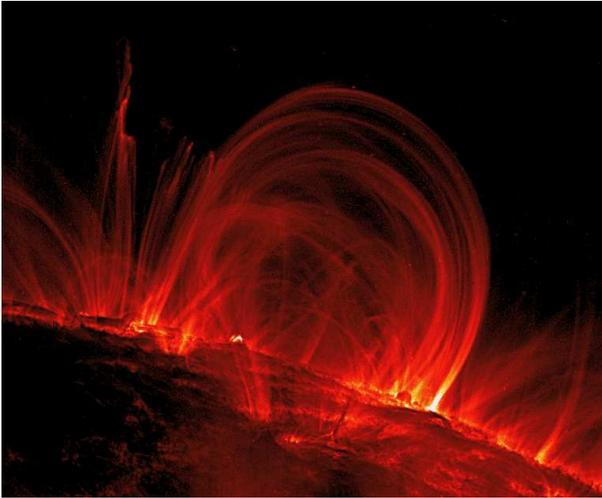
$$F_C(s) = -\kappa T^{5/2}(s) \frac{dT(s)}{ds} = -\frac{2}{7} \kappa \frac{d}{ds} \left[T^{7/2}(s) \right], \quad (14)$$

wo $\kappa \approx 9 \times 10^{-16} \text{ W/m/K}^{-7/2}$ der temperaturunabhängige Anteil der Spitzerleitfähigkeit ist. Die große Unbekannte ist die Heizfunktion in Glg. 13. Die einfachsten Möglichkeiten sind eine konstante Heizrate $E_H(s) = \text{const}$ oder eine exponentielle Heizrate $E_H(s) = E_0 \exp(-s/s_H)$. Beide sind unrealistisch.

Die große Schwierigkeit an diesem Problem ist, dass die Gleichungen 11, 12 und 13 keine analytische Lösung haben. Deshalb sind heute hochkomplexe magnetohydrodynamische Modelle auf Supercomputern in dieser Fragestellung unabdingbar. Sie sind aber für eine Vorlesung und für das Vermitteln eines Verständnisses der Probleme unbrauchbar weil zu kompliziert.

Wir betrachten im Folgenden verschiedene einfache Modelle zur Heizung von Schleifen, Flares und der Korona als Ganzes.

RTV-Skalierungsgesetze



Rosner et al. (1978) haben ein erstes einfachstes Modell entwickelt, welches koronale Schleifen qualitativ erklären konnte. Sie nahmen einen konstanten Druck und eine konstante Heizrate an:

$$p(s) = 2n_e(s)kT(s) = \text{const.} \quad \text{und} \quad E_H(s) = \text{const.}$$

und haben den Wärmefluss $F_C(s)$ als eine Funktion der Temperatur ausgedrückt. Dies erlaubte ihnen, die hydrostatischen Gleichungen 11 bis 13 zu lösen.

$$\begin{aligned} F_C(s) &= -\kappa T^{5/2}(s) \frac{dT(s)}{ds} = -\frac{2}{7} \kappa \frac{d}{ds} \left[T^{7/2}(s) \right], \\ \frac{dF_C(s)}{ds} &= \frac{dF_C(T)}{dT} \frac{dT(s)}{ds} = \frac{dF_C}{dT} \left(-\frac{F_C(T)}{\kappa T^{5/2}} \right). \end{aligned} \quad (15)$$

Im hydrostatischen Gleichgewicht verschwindet die linke Seite von Glg. 13 und unter der Annahme eines konstanten Querschnittes $A(s) = \text{const.}$ auch seine Ableitung, $\partial_s A(s)$.

$$\begin{aligned} \frac{dF_C(s)}{ds} &= E_H(s) - E_R(s) && | \cdot F_C(s) \cdot ds \\ -F_C(s)dF_C(s) &= \kappa T^{5/2} E_H(s) \frac{dT(s)}{ds} ds - \kappa T^{5/2} E_R(s) \frac{dT(s)}{ds} ds, && \left| \int \right. \\ - \int F_C dF_C &= -\frac{1}{2} F_C^2 \Big|_{F_C(T_0)}^{F_C(T)} = \int_T^{T_0} \kappa T'^{5/2} E_H(T') dT' - \int_T^{T_0} \kappa T'^{5/2} E_R(T') dT', \\ - \int F_C dF_C &= -\frac{1}{2} F_C^2 = f_H(T) - f_R(T), \implies F_C = \sqrt{2(f_R(T) - f_H(T))}. \end{aligned}$$

Damit lassen sich nun in Glg. 15 die Längenkoordinate s und das Temperaturprofil

T separieren. Wir schreiben das Inverse dieser Gleichung,

$$\frac{ds}{dF_C} = \frac{dT}{dF_C} \left(-\frac{\kappa T^{5/2}}{F_C} \right) \quad \left| \cdot dF_C \int \right.$$

$$s - s_0 = \int_{s_0}^s ds = \int_{T_0}^T \frac{-\kappa T'^{5/2}}{F_C(T')} dT' = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{T_0}^T \frac{-\kappa T'^{5/2}}{\sqrt{f_R(T') - f_H(T')}}.$$

Mit einigen weiteren vereinfachenden Annahmen konnten Rosner et al. daraus einen analytischen Ausdruck für das inverse Temperaturprofil $s(T)$ finden,

$$s(T) = s(T_0) + \frac{a}{p_0} \left\{ b T_{\max}^3 \left[\arcsin(T/T_{\max}) - (T/T_{\max}) (1 - (T/T_{\max})^2)^{1/2} \right] + 1 \right\}.$$

Daraus folgen direkt die sog. RTV-Skalierungsgesetze, welche zwei Beziehungen

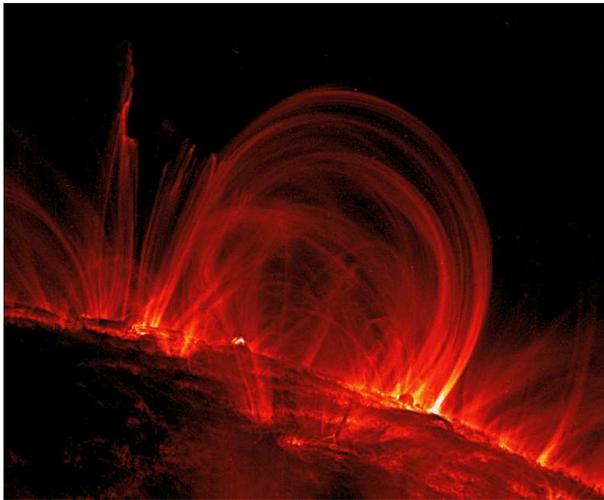
zwischen den drei unbekanntem Parametern L , T_{\max} und p_0 definieren:

$$T_{\max} \propto (p_0 L)^{1/3}, \quad \text{und} \quad E_{H0} \propto p_0^{7/6} L^{-5/6} \propto T_{\max}^{7/2} L^{-2}.$$

Diese RTV-Skalierungsgesetze wurden 20 Jahre lang verwendet und schienen bis zu den ersten Beobachtungen von TRACE auch einigermaßen gut mit der Realität übereinzustimmen, jedenfalls, wenn man sie auf log-log-Plots anschaut. . . ⁶

⁶Wie dies Aschwanden (2009) so schön sagt.

Das RTV-Skalierungsgesetz von Serio et al. (1981)



Zur besseren Beschreibung⁷ haben Serio et al. 1981 zwei weitere Parameter eingeführt, eine Heizskalenhöhe und eine Druckskalenhöhe. Damit konnte die Heizung an den Fußpunkten konzentriert werden und die Gravitation wurde berücksichtigt.

$$T_{\max} \propto (p_0 L)^{1/3} \exp\left(-0.08 \frac{L}{s_H} - 0.04 \frac{L}{H_p}\right),$$

$$E_{H_0} \propto \frac{T_{\max}^{7/2}}{L^2} \exp\left(0.78 \frac{L}{s_H} - 0.36 \frac{L}{H_p}\right),$$

wo s_H die Skalenlänge für die Heizung und H_p die Druckskalenhöhe sind.

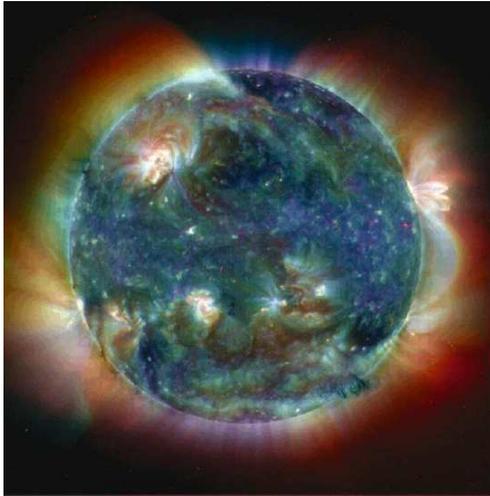
⁷In den bisherigen RTV-Gesetzen waren die Heizrate und der Druck konstant, die Gravitation vernachlässigt.

Das Skalierungsgesetz von Serio et al., ist wegen folgenden Punkten immer noch stark vereinfacht

1. Die Druckskalenhöhe (P6_V3) $H_p = (kT)/(mg_{\odot})$ wird als konstant angenommen. $T = T(s)$ wird vernachlässigt, wie auch eine evtl. veränderliche Zusammensetzung und damit $m(h)$.
2. Schleifen werden immer noch als Halbkreise genähert.
3. Der Querschnitt $A = A(s) = \text{const.}$ wird immer noch als konstant angenommen.
4. Die Gravitation wird als konstant angenommen $g(h) = g_{\odot} = \text{const.}$

Trotzdem war dies das Beste bis zum Auftauchen von analytischen Näherungen an Resultate von numerischen Simulation hydrostatischer Schleifen.

Heizung der Korona



Wir sind nun gerüstet, das alte Problem der Koronaheizung⁸ quantitativer zu verstehen. Dazu bedienen wir uns der Energiegleichung für eine hydrostatische Korona,

$$E_H(\vec{x}) = E_R(\vec{x}) + E_C(\vec{x}),$$

wo jeder Term eine Leistung pro Volumen darstellt, links die Heizung, rechts die Verlustterme durch Strahlung und Wärmeleitung. Wie man links sieht⁹ können benachbarte Gebiete in der Korona eine sehr unterschiedliche Temperatur aufweisen, die Korona ist magnetisch stark strukturiert. Weil die Wärmeleitung entlang \vec{B} sehr gut, senkrecht zu \vec{B} lausig

⁸Was hält den Topf heißer als die Platte?

⁹Im Bild sind die 171Å-Linie von Fe IX blau, die Fe XII - 195Å-Linie grün und die Fe XV 284Å-Linie rot dargestellt. Sie entstehen bei 1, 1.5 und 2 MK. Quelle: SOHO/EIT

ist, kann man die Ortsabhängigkeit wie bei der Diskussion der koronalen Schleifen auf eine Koordinate entlang des Feldes reduzieren,

$$E_H(s) = E_R(s) + E_C(s).$$

wir haben bereits gesehen, dass die Strahlungsverluste quadratisch mit der Dichte gehen, es ist deshalb sinnvoll, die RTV-Gesetze mit $p_0 = nkT_{\max}$ durch die Dichte n auszudrücken.

$$T_{\max} \propto (pL)^{1/3} \longrightarrow (nkT_{\max}L)^{1/3} \implies T_{\max} \propto (nL)^{1/2},$$
$$E_{H_0} \propto T_{\max}^{7/2}/L^2 \implies E_{H_0} \propto n^{7/4}L^{-1/4}.$$

In anderen Worten, die Heizrate hängt stark von der Dichte, aber nur schwach von der Länge ab. Dies widerspiegelt eine Vermutung, die wir auch schon hätten haben können: Wenn wir annehmen, dass die Verluste nur durch Strahlung entstehen,

dann muss der Verlustterm ja mit dem Quadrat der Dichte gehen,

$$E_{H_0} \approx E_R = n_e^2 \Lambda(T).$$

Im Wesentlichen muss also die Heizleistung etwa quadratisch mit der Dichte gehen, je dichter das Plasma, desto stärker muss geheizt werden. In einem koronalen Loch (im Bild auf Seite 38 oben die blaue Region) beträgt die Dichte typisch $n_e \approx 10^8 \text{cm}^{-3}$ und muss mit $E_{H_0} \approx 10^{-7} \text{W/m}^3$ geheizt werden.

Weil die Wärme sich entlang des Feldes schnell verteilt, reicht es aus, den Wärmefluss am Fußpunkt der Flussröhre zu bestimmen. Dazu bedienen wir uns eines schönen Tricks, den man sich merken soll. Integriert man eine konstante Größe entlang einer hydrostatischen Flussröhre oder Atmosphäre, so ist das Resultat gerade gleich dem Produkt der Größe mit der Skalenhöhe. Der Heizfluss

(der Poyntingfluss), der am Fußpunkt eingespeist werden muss, ist also

$$\begin{aligned}
 F_{H_0} &= \int_0^\infty E_{H_0} e^{-l/H_n} dl = - E_{H_0} \cdot H_n e^{-l/H_n} \Big|_0^\infty = -0 + E_{H_0} \cdot H_n \\
 &\approx 5 \cdot \left(\frac{n_e}{10^8 \text{cm}^{-3}} \right)^2 \cdot \left(\frac{T}{\text{MK}} \right) \quad [\text{W/m}^{-2}],
 \end{aligned}$$

wo $H_n \approx 46$ Mm. Für ein koronales Loch reichen also etwa 5 W/m^2 , in einer aktiven Region mit einer Schleifendichte von $n_e \approx 2 \cdot 10^9/\text{cm}^3$ und $T = 2.5\text{MK}$ werden etwa 5 kW/m^2 gebraucht. Je nach Region der Korona kann sich der Heizbedarf also um bis zu drei Größenordnungen unterscheiden. Hier spielt nach dem RTV-Gesetz die Temperatur eine wichtige Rolle. Weil $E_H \propto T^{7/2}$ braucht eine Schleife, die im Röntgenbereich ($T \sim 3\text{MK}$) leuchtet, fast 50 mal mehr geheizt zu werden, als eine Schleife, die im EUV (bei $T \sim 1\text{MK}$) emittiert.

Weil die Heizleistung mit dem Quadrat der Dichte geht, können wir auch festhalten, dass die Skalenhöhe der Heizung etwa die Hälfte der Dichteskalenhöhe betragen muss:

$$E_H(h) = E_{H_0} e^{-h/s_H} \propto E_R(h) \propto n_e(h)^2 = n_0^2 \left(e^{-h/H_n} \right)^2.$$

Damit muss gelten:

$$s_H \approx \frac{H_n}{2} \approx 23 \left(\frac{T}{1\text{MK}} \right) [\text{Mm}].$$

Vergleich von numerischen Simulationen mit Beobachtungen von vielen Schleifen ergibt einen etwas kleineren Wert von $s_H = 17 \pm 6\text{Mm}$. Zum Vergleich: Der Sonnenradius beträgt ca. 700 Mm.

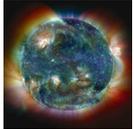
Die folgende Tabelle vergleicht die Wärmeflüsse verschiedener Strukturen.

Parameter	Koronales Loch	Ruhige Sonne	Aktive Region
Temperatur [K]	10^6	1.5×10^6	2.5×10^6
koronale Energieverluste [W/m^2]			
Wärmeleitungsfluss	60	2×10^2	$10^2 - 10^4$
Strahlungsfluss	10	10^2	5×10^3
Sonnenwind	7×10^2	< 50	$< 10^2$
Total	8×10^2	2×10^2	10^4

Die Flüsse liegen also zwischen $200 \text{ W}/\text{m}^2$ und $10 \text{ kW}/\text{m}^2$. Zum Vergleich: Die Solarkonstante bei 1 AE beträgt $S_{\odot} = 1367 \text{ W}/\text{m}^2$. 1 AE entspricht ca. 215 Sonnenradien. Die Leistung pro Quadratmeter an der Sonnenoberfläche beträgt damit

$$S_{r_{\odot}} = 215^2 \cdot 1367 \text{ W}/\text{m}^2 = 632,4 \text{ MW}/\text{m}^2.$$

Heizung der Korona – II



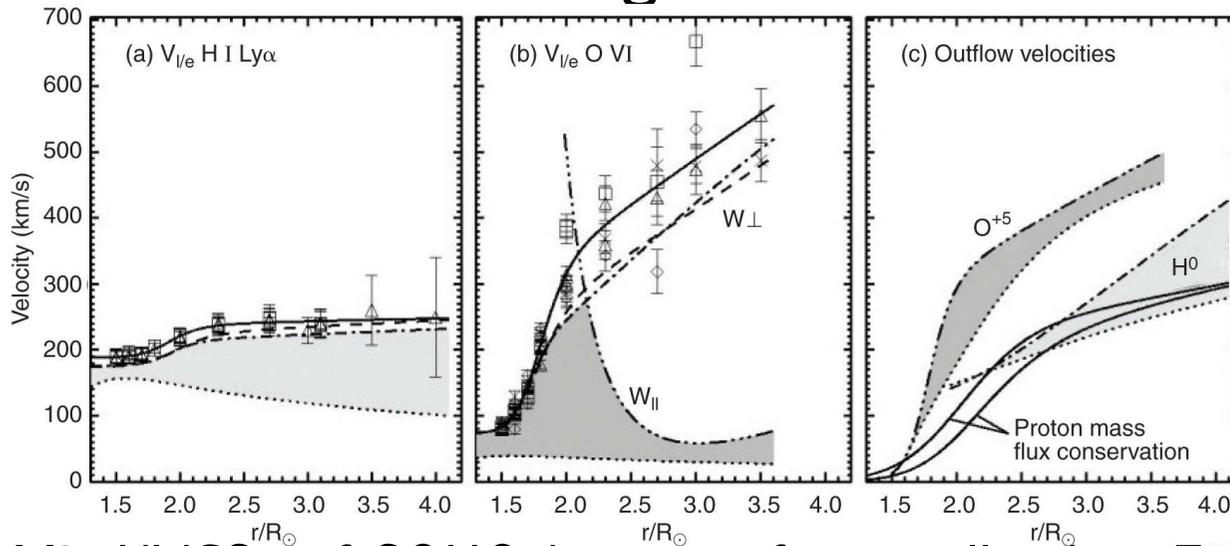
Für die Heizung der Korona genügt also nur ein verschwindend kleiner Anteil der effektiven Leistung der Sonne. Der größte Teil wird in Form von Licht abgestrahlt. Weil die Korona optisch dünn ist, absorbiert sie auch nur sehr wenig von dieser Strahlung. In der Tat muss sie anders geheizt werden, man unterscheidet heute drei große Klassen von Szenarien:

DC Heizung: Modelle, in denen die Heizung langsamer verläuft, als typische Zeitkonstanten der Korona, wie z. B. die Zeit, die eine Alfvénwelle braucht, um durch eine koronale Schleife zu propagieren.

AC Heizung: Modelle, in denen die Heizung schneller verläuft als typische Zeitkonstanten der Korona, wie z. B. die Zeit, die eine Alfvénwelle braucht, um durch eine koronale Schleife zu propagieren.

Rekonnektion: Hier wird angenommen, dass die Bedeutung oder Leistung von Rekonnektionsereignissen als Potenzgesetz verteilt ist und eine Vielzahl von Rekonnektionsereignissen aufweist, die (noch) nicht beobachtet werden können.

Heizung der Korona – AC Heizung



Ich gehe im Folgenden etwas näher auf die AC-Heizung ein weil sie m. E. einige Eigenschaften hat, die sie gegenüber den anderen als besonders erfolgsversprechend auszeichnet.

Mit UVCS auf SOHO hat man festgestellt, dass Emissionslinien z. B. von O VI (d.h. O⁵⁺) gegenüber solchen von Wasserstoff¹⁰ enorm verbreitert sind, was auf eine sehr hohe "Temperatur" hindeutet. Dies kann man nur durch Absorption von resonanten Wellen erklären. Man findet in Folge auch, dass schwere Ionen schneller aus der Korona entweichen, als Wasserstoff.

¹⁰Dieser ist über Ladungsaustausch sehr gut an die Protonen des Sonnenwindes gekoppelt. Bild: NASA/Solar Probe, nach Kohl et al., 1998

AC Heizung – Wellengeheizte Korona

Eine Heizung durch Wellen kann dadurch beschrieben werden, dass man zur Bewegungsgleichung (Glg. 12) und zur Energiegleichung (Glg. 13) weitere Terme hinzufügt, die hier rot eingefügt sind.

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \frac{1}{A} \frac{\partial}{\partial s} (nvA) = 0,$$

$$mn \frac{\partial v}{\partial t} + mnv \frac{\partial v}{\partial s} = -\frac{\partial p}{\partial s} + \frac{\partial p_{\text{grav}}}{\partial r} \left(\frac{\partial r}{\partial s} \right) + D, \quad (16)$$

$$mn \frac{\partial e}{\partial t} + \frac{mnv}{A} \frac{\partial eA}{\partial s} + \frac{p}{A} \frac{\partial v}{\partial s} = E_W(s) + E_A(s) - E_R(s) - \frac{1}{A} \frac{\partial (F_C A)}{\partial s} \quad (17)$$

Dabei ist D der Impulsübertrag durch Wellen, $E_W(s)$ und $E_A(s)$ sind die Heizraten durch die Dämpfung von Alfvénwellen und von Schallwellen.

Die Bewegung der photosphärischen Granulation regt Schallwellen an, die wiederum in Stoßfronten (Schocks) Energie dissipieren können. Nach den Rankine-Hugoniot-Beziehungen (P6_V10) ist das “geschockte” Plasma heißer, als das ungeschockte. Die deponierte Wärmemenge kann sich nun auch über Wärmeleitung im Plasma ausbreiten und führt netto zu einer Heizung des Plasmas.

Durch die Bewegung der photosphärischen Granulation werden auch die Fußpunkte von magnetischen Feldlinien stochastisch bewegt. Diese Bewegung setzt sich entlang der expandierenden Feldlinien fort und regt Alfvénwellen an. Diese können in der Korona und Übergangsschicht reflektiert werden, weshalb in der Korona eine Mischung von sich auswärts und einwärts bewegenden Wellen herrscht. Durch deren Wechselwirkung zerfallen langwellige Wellen in kurzwellige, es bildet sich eine turbulente Kaskade. Diese dissipiert mit resonanten Ionen und Elektronen, die ihrerseits geheizt werden. Dabei werden schwere Ionen wegen ihrer höheren m/q stärker geheizt als Protonen. Durch die Spiegelkraft werden sie nach außen beschleunigt, es entsteht ein Sonnenwind.

Das verallgemeinerte Ohmsche Gesetz

Eine Gleichung für die Stromdichte finden wir, indem wir die mit den jeweiligen Massen und Ladungen gewichteten Bewegungsgleichung für die Elektronen von der für die Ionen subtrahieren. Nach einigem Rechnen erhält man

$$\frac{m_e}{e} \frac{\partial \vec{j}}{\partial t} = \vec{\nabla} \cdot \Pi_e + ne \left(\vec{E} + \vec{v}_e \times \vec{B} \right) - \mathbf{R}.$$

Vergleichen wir dies mit der Bewegungsgleichung der MHD, sehen wir, dass der Strom durch die Elektronen getragen wird. Nur diese beeinflussen den Strom merklich. Dies ist eine Folge davon, dass Elektronen im Plasma viel beweglicher sind, als Ionen. Das heißt aber auch, dass die Elektronen und Ionen sich nicht unbedingt genau gleich verhalten müssen, sogar in der Ein-Flüssigkeitstheorie werden die Elektronen sich mobiler verhalten, als Ionen. Unter Ausnutzung des kleinen Masseverhältnisses m_e/m_i findet man nach einigem Rechnen das

verallgemeinerte Ohmsche Gesetz,

$$\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B} = \eta \vec{j} + \frac{1}{ne} \vec{j} \times \vec{B} - \frac{1}{ne} \vec{\nabla} \cdot \Pi_e + \frac{m_e}{ne^2} \frac{\partial \vec{j}}{\partial t}. \quad (18)$$

Man beachte, dass in diesem Ohmschen Gesetz nebst dem 'normalen' resistiven Term auch ein Hall-Term $\vec{j} \times \vec{B}$ auftritt, wie auch ein Term, der durch den Elektronendruckgradienten $\vec{\nabla} \cdot \Pi_e$ bestimmt wird, auftreten. Beide Terme können Ströme hervorrufen, die senkrecht zum ursprünglichen Strom und zum Magnetfeld stehen. Außerdem enthält dieses Ohmsche Gesetz eine zeitliche Änderung des Stroms, welche aufgrund der Trägheit der Elektronen auftreten kann. Selbst in diesem einfachst-möglichen Bild von einer einzigen Flüssigkeit treten neue, bisher unbekannte Phänomene auf.