

Die Induktionsgleichung der MHD

In der MHD (P6_V5) kann der Verschiebungsstrom vernachlässigt werden. Damit können wir das Ampèresche und Ohmsche Gesetz schreiben als

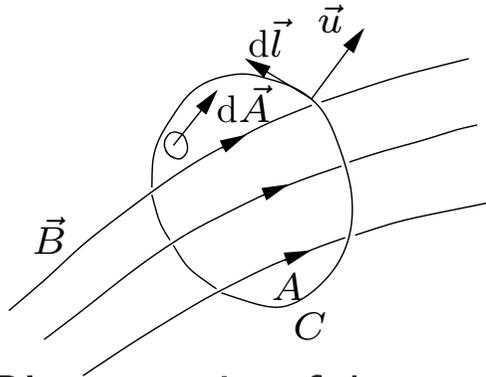
$$\vec{j} = \frac{1}{\mu_0} \vec{\nabla} \times \vec{B} = \sigma \left(\vec{E} + \vec{u} \times \vec{B} \right), \quad \text{wo } \sigma \doteq \frac{ne^2}{m_e} \tau_c$$

die elektrische Leitfähigkeit und τ_c die mittlere Kollisionszeit im Plasma sind. Wir bestimmen die Rotation und setzen aus dem Faradayschen Gesetz $\partial_t \vec{B} = -\vec{\nabla} \times \vec{E}$ ein und erhalten mit $\nabla \times \nabla \times B = \nabla(\nabla \cdot B) - \Delta B = -\Delta B$ ("rot rot gleich grad div - Laplace") die Induktionsgleichung der MHD (Glg. 1)

$$\begin{aligned} \frac{1}{\mu_0 \sigma} \vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{B} &= \vec{\nabla} \times \vec{E} + \vec{\nabla} \times \vec{u} \times \vec{B} \\ \dot{\vec{B}} &= \vec{\nabla} \times \vec{u} \times \vec{B} + \frac{1}{\mu_0 \sigma} \Delta \vec{B}. \end{aligned} \quad (1)$$

Die Induktionsgleichung und eingefrorene Feldlinien

Im Falle, dass die Leitfähigkeit sehr groß oder \vec{u} sehr schnell ist, kann der diffusive Term vernachlässigt werden,



$$\dot{\vec{B}} = \vec{\nabla} \times \vec{u} \times \vec{B}, \quad (2)$$

was bedeutet, dass der magnetische Fluss durch eine im Plasma mitgeführte geschlossene Kurve C konstant bleibt. Der durch die Fläche A durchtretende magnetische Fluss kann sich auf zwei Weisen ändern:

- das in C eingeschlossene Feld \vec{B} kann sich ändern,
- die Kurve C bewegt sich relativ zum Feld \vec{B} .

Im ersten Fall ist die Änderung des Flusses durch ein kleines Flächenelement $d\vec{A}$ gegeben durch

$$\dot{\vec{B}} \cdot d\vec{A} \xrightarrow{\text{Integration über } A} \int_A \partial_t \vec{B} \cdot d\vec{A} \quad (3)$$

und die totale Änderung ergibt sich durch Integration über die gesamte Fläche A . In der zweiten Möglichkeit bewegt sich ein infinitesimales Element der Kurve $d\vec{l}$ relativ zu \vec{B} . Die Änderung des eingeschlossenen Feldes ist dann

$$\vec{B} \cdot (\vec{u} \times d\vec{l}) \quad (4)$$

und die totale Änderung ergibt sich durch Konturintegration entlang C . Wir verwenden die Vektoridentität $A \cdot (B \times C) = (A \times B) \cdot C$ um Glg. 4 umzuformen. Die gesamte Änderung des Flusses durch die durch die Kurve C aufgespannte Fläche A ist die Summe der beiden Fälle

$$\frac{d}{dt} \int_A d\vec{A} \cdot \vec{B} = \int_A d\vec{A} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} - \oint_C d\vec{l} \cdot (\vec{u} \times \vec{B}). \quad (5)$$

Das Konturintegral formen wir mit Hilfe des Gesetzes von Stokes in ein Flächen-

integral um

$$\oint_C d\vec{l} \cdot (\vec{u} \times \vec{B}) = \int_A d\vec{A} \vec{\nabla} \times (\vec{u} \times \vec{B}). \quad (6)$$

Im Integranden steht nun genau die rechte Seite der Induktionsgleichung für den Fall unendlich guter Leitfähigkeit des Plasmas, was heisst, dass

$$\frac{d}{dt} \int_A d\vec{A} \cdot \vec{B} = \int_A d\vec{A} \cdot \left(\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} - \vec{\nabla} \times (\vec{u} \times \vec{B}) \right) = 0. \quad (7)$$

Dies bedeutet, dass sich der Fluss durch die Kurve C nicht verändert. Physikalisch bedeutet dies, dass sich das Magnetfeld mit dem Plasma bewegt, was salopp oft ausgedrückt wird als die Approximation der “eingefrorenen” Feldlinien. Für $\sigma \rightarrow \infty$ ist das Magnetfeld im Plasma eingefroren, und es fliesst passiv mit. Diese Näherung heisst auch “ideale” MHD.

Der Übergang zwischen einem diffusiven und einem eingefrorenen Magnetfeld lässt

sich parametrisieren durch das Verhältnis der Diffusionszeit τ_d zur Konvektionszeit τ_u . Wir haben

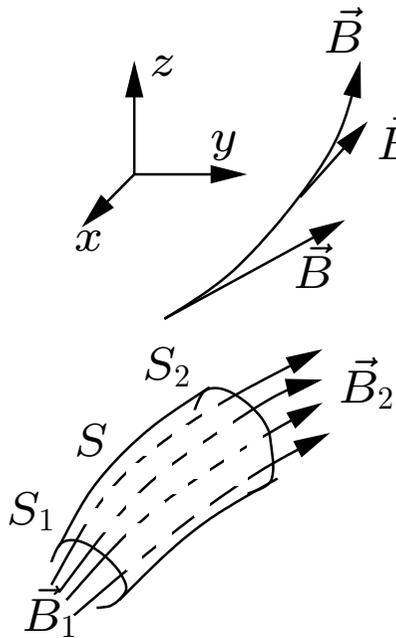
$$\tau_d = \mu_0 \sigma L^2, \quad \tau_u = \frac{L}{u} \quad (8)$$

und definieren damit die magnetische Reynoldszahl R_M

$$R_M \doteq \frac{\tau_d}{\tau_u} = \frac{\mu_0 \sigma L^2 u}{L} = \mu_0 \sigma L u. \quad (9)$$

Ist R_M groß, so gilt die Näherung der eingefrorenen Feldlinien, ist R_M klein, so diffundiert das Magnetfeld. Im interplanetaren Medium, wie in der Chromosphäre und Korona ist R_M groß.

Was ist eine Feldlinie, was eine Flussröhre?



Wir definieren eine **Feldlinie** als eine Linie, deren Tangente überall und jederzeit in die Richtung des magnetischen Feldes \vec{B} zeige. In kartesischen Koordinaten ist sie die Lösung von

$$\frac{dx}{B_x} = \frac{dy}{B_y} = \frac{dz}{B_z}. \quad (10)$$

Eine **Flussröhre** ist dasjenige Plasmavolumen, welches durch eine Ansammlung von Feldlinien eingegrenzt wird, die von einer geschlossenen Kurve S ausgehen. Dabei bleibt F_m durch eine durch S_i berandete Fläche S erhalten,

$$F_m = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = \text{const.} \quad (11)$$

wo $d\vec{S}$ in dieselbe Richtung zeige, wie \vec{B} damit $F_m > 0$, wie man leicht sieht:
Wir integrieren Glg. 11 über die Fläche S , welche das Volumen V der Flussröhre zwischen den beiden Endflächen S_1 und S_2 berande. Der Beitrag der gekrümmten Fläche S verschwindet, weil sie ja immer tangential an das Feld anliegt. Also gilt

$$\int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = \int_{S_1} \vec{B} \cdot d\vec{S} + \int_{S_2} \vec{B} \cdot d\vec{S},$$

wo $d\vec{S}$ immer nach außen zeige. Nach dem Satz von Gauß gilt aber auch

$$\int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = \int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{B} dV,$$

was wegen $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$ verschwindet. Damit gilt die Behauptung.

Die Induktionsgleichung der MHD

In einem unendlich leitfähigen (sog. idealen) Plasma gilt $\vec{E} = -\vec{u} \times \vec{B}$, ein elektrisches Feld tritt nur aufgrund eines am Beobachter vorbeikonvektierten Magnetfeldes auf. Elektrische Felder werden wegen der unendlichen Leitfähigkeit sehr effizient und schnell abgebaut. Setzen wir diesen Ausdruck für das elektrische Feld in das Faradaysche Induktionsgesetz $\dot{\vec{B}} = -\vec{\nabla} \times \vec{E}$ ein, so erhalten wir, wie bereits auf Seite 1 gesehen, die **Induktionsgleichung der idealen MHD**,

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \vec{\nabla} \times (\vec{u} \times \vec{B}), \quad (12)$$

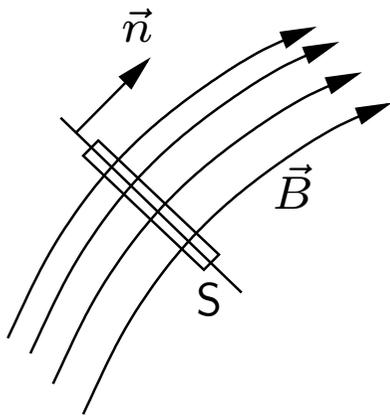
die beschreibt, wie sich das Magnetfeld zeitlich verändert¹.

¹Das Faradaysche Induktionsgesetz beschreibt, wie ein zeitlich veränderliches Magnetfeld eine Spannung induziert. In der idealen MHD beschreibt es wie sich das Magnetfeld zeitlich ändert.

Wir nehmen von der Induktionsgleichung (12) die Divergenz und erhalten

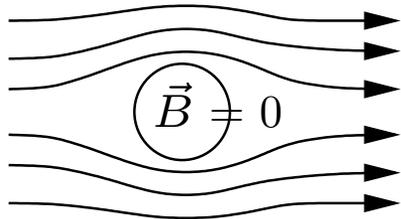
$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} &= \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \times (\vec{u} \times \vec{B}), \\ \frac{\partial}{\partial t} (\vec{\nabla} \cdot \vec{B}) &= 0,\end{aligned}\tag{13}$$

was uns erlaubt, die Maxwellglg. $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$ nur noch als Anfangsbedingung zu verlangen. Ist $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$ einmal gesetzt, so sagt uns Glg. 13, dass dies in aller Zukunft so bleiben wird.

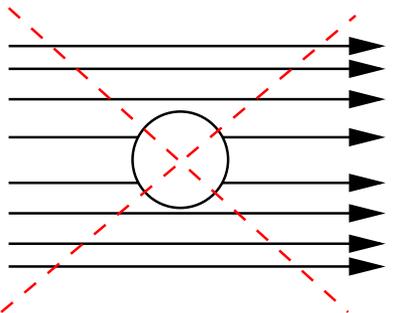


Wir legen um die Fläche S ein dünnes Volumen V und integrieren darüber. Nach dem Satz von Gauß gilt:

$$\int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{B} dV = \oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = \oint_S \vec{B} \cdot \vec{n} dS = 0,$$



was bedeutet, dass die Normalenkomponenten von \vec{B} , $B_n = \vec{B} \cdot \vec{n}$ sich über eine beliebige Fläche nur stetig verändern darf. Darum muss ein feldfreies Gebiet auch seine Umgebung beeinflussen, wie in der mittleren Abbildung links gezeigt.



Eine Situation wie in der untersten Abbildung kann es nicht geben, denn an der Oberfläche des Körpers müsste sich das Magnetfeld \vec{B} unstetig ändern.

Die Bedeutung der Stromdichte \vec{j} in der MHD

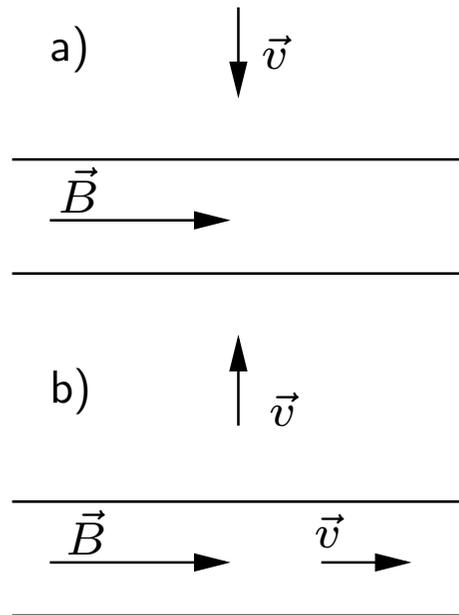
In der Elektrodynamik oder Elektrizitätslehre sagen uns die Maxwellgleichungen wie elektrische und magnetische Felder aus den Ladungs- und Stromverteilungen folgen. Das Feld einer Spule ist durch die Stromverteilung gegeben.

In der Magnetohydrodynamik spielt die Stromdichte eine untergeordnete Rolle. Wir betrachten nochmals das Faradaysche Induktionsgesetz für langsame Bewegungen, wenn also der Verschiebungsstrom $(1/c^2)\partial\vec{E}/\partial t$ vernachlässigt werden kann,

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j} \longrightarrow \vec{j} = \frac{1}{\mu_0} (\vec{\nabla} \times \vec{B}) \quad \xrightarrow{\vec{\nabla} \cdot} \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = \frac{1}{\mu_0} \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{B}) = 0.$$

Dies bedeutet, dass in der MHD Ströme keine Quellen oder Senken haben und die Ladung automatisch erhalten bleibt. Ströme richten sich nach dem Magnetfeld.

Exkurs – Astrophysik



Wir schätzen für drei Konfigurationen das Verhalten von \vec{B} ab unter der Annahme, dass es im Plasma eingefroren sei weil dessen Leitfähigkeit sehr hoch sei. Der magnetische Fluss durch eine Fläche ist dann erhalten, $\vec{B} \cdot \vec{A} = \text{const.}$
 Im Fall a) links wird eine Flussröhre von allen Seiten $\perp \vec{B}$ komprimiert, so dass $B/\rho = \text{const.}$

Im Fall b) sei $\vec{v} \parallel \vec{B} \parallel \vec{z}$, kann aber von z abhängen. \vec{B} bleibt in diesem Fall konstant, ferner gilt wegen Massenerhaltung $\rho l = \text{const.}$ Damit finden wir, dass $B/(\rho l) = \text{const.}$

Schließlich kann ein Plasma (Fall c)) sich auch auf eine Kugel mit Radius r zusammenziehen. Dabei bleiben Masse (ρr^3) und Feldfluss ($B r^2$) erhalten, also $B/\rho^{2/3} = \text{const.}$

Exkurs – Weißer Zwerg und Neutronenstern

Ein Stern mit Radius $R = 10^6$ km ziehe sich zu einem weißen Zwerg mit Radius $r = 10^4$ km zusammen. Dies geschieht isotrop. Das Feld von ursprünglich 10 mT verstärkt sich wegen $B/\rho^{2/3} = \text{const.}$ um einen Faktor 10^4 auf 100 T. Solche Feldstärken werden tatsächlich beobachtet.

Noch extremer ist der Kollaps zu einem Neutronenstern. Der Stern mit $R = 10^6$ km kollabiere in einen Neutronenstern mit $r = 10$ km. Die Dichte muss also um einen Faktor $(10^5)^3$ zunehmen, die Oberfläche um einen Faktor 10^{10} abnehmen. Damit ändert sich das Feld von 10 mT auf 100 MT, was etwa der bei Neutronensternen beobachteten Feldstärke entspricht.

Man muss sich nun fragen, ob in diesen Fällen die Annahme, dass das Feld im Plasma eingefroren ist, berechtigt war.

Abschätzung der Zeitskalen

Die Diffusionskonstante in Glg. 1 hängt nur logarithmisch (also langsam) von der Dichte ab^2 , was wir im Folgenden vernachlässigen. Die Leitfähigkeit hängt von der Temperatur wie $T^{3/2}$ ab, die Diffusionskonstante mit dem Inversen davon. Drücken wir die Temperatur in eV aus, wie das oft getan wird, so erhalten wir

$$\frac{1}{\mu_0\sigma} \approx \frac{420}{T_{[\text{eV}]^{3/2}}^2} \text{ m}^2/\text{s}.$$

Dabei entspricht ein eV etwa 10.000 K. Wir schätzen nun den Laplace-Operator $\Delta = \vec{\nabla}^2$ mit $\vec{\nabla}^2 \sim 1/L^2$ ab, wo L eine typische Skala für eine Änderung sei. Die Zeitskala beträgt dann

$$\tau_{\text{diff}} \approx 10^{-3} T_{[\text{eV}]^{3/2}}^2 L^2, \quad \text{wo} \quad \frac{1}{420} \sim 10^{-3}$$

²Vgl. mit dem Ausdruck für den Spitzerwiderstand in P6_V2

und hängt also im Wesentlichen von der Größe des Systems ab. Beim Kollaps zu einem weißen Zwerg haben wir $L \sim 10^4$ km und eine koronale Temperatur von etwa 100 eV (10^6 K) angenommen. Mit diesen Annahmen erhalten wir für die Zeitskala

$$\tau_{\text{diff}} \approx 10^{-3} (100)^{3/2} (10^7)^2 \approx 10^{14} \text{ Sekunden } (\approx \pi \cdot 10^6 \text{ Jahre}).$$

Ändert sich das Magnetfeld (\vec{B}) schneller als in 10^{14} Sekunden, so ist die Annahme des eingefrorenen Feldes gerechtfertigt. Solange der Kollaps also schneller stattfindet als in 3 Millionen Jahren, darf man annehmen, dass das Feld eingefroren bleibt.

Die Situation beim Kollaps zum Neutronenstern ist ähnlich, wie man sich leicht überzeugt.

Übung 1. *Tun Sie dies! ($T \geq 10^4$ eV, $r = 10$ km). Tun Sie dies nun auch für eine koronale Schleife, etc.*

Magnetfelder im turbulenten Medium

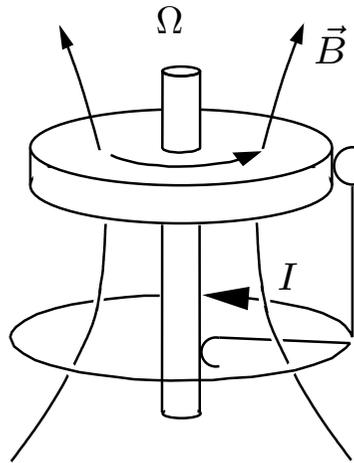
Wie verhält sich ein magnetisiertes turbulentes Plasma wie es z. B. in der protogalaktischen Scheibe wahrscheinlich existierte? Auch hier spielt die Näherung des eingefrorenen Feldes eine wichtige Rolle. Wir haben

$$B \cdot A = \text{const.} \quad \text{und} \quad m = \rho A l = \text{const.}$$

Teilen wir die linke durch die rechte Gleichung, so finden wir $B/(\rho l) = \text{const.}$ In einem turbulenten Medium ist die mittlere Dichte \sim konstant und der Abstand zwischen zwei ursprünglich um δl separierten Punkte wächst proportional zu δl , also exponentiell, $l(t) \sim \exp(l/v_c \cdot t)$. Die Geschwindigkeit $v_c = L/\tau$ ist definiert durch die Zeit τ , die ein turbulenter Wirbel der Größe L für eine Umdrehung braucht (engl. eine "Eddy turnover time"). Damit nimmt das Feld mit der Zeit exponentiell zu, wir haben (wenigstens zeitweise) einen turbulenten Dynamo!

$$B^2 \sim B_0^2 \exp(2 \cdot l/v_c \cdot t).$$

Der homopolare Dynamo von Bullard



Eines der intuitiv klarsten Beispiele für die Wirkungsweise eines Dynamos wurde durch Bullard 1955 entwickelt. Sein homopolarer Dynamo zeigt auf einfache Weise die wichtigsten Eigenschaften eines Dynamos: Die **axiale Symmetrie** wird durch den Draht **gebrochen**, beim elektrischen Kontakt mit der Achse und an der rotierenden Scheibe erfolgt **differentielle Rotation**. Dabei kann ein evtl. vorhandenes Primordialfeld verstärkt werden.

Um dies zu verstehen, nehmen wir an, dass ein Strom I durch Draht und Scheibe (also durch die Schleife) fließe. Sofern die Scheibe nicht ein zu guter Leiter ist erzeugt dieser Strom ein schwaches Magnetfeld \vec{B} bzw. einen schwachen magnetischen Feldfluss Φ durch die Scheibe,

$$\Phi = M I,$$

wo M die Gegen-Induktivität zwischen Drahtschleife und Scheibe bedeutet.

Die Ladungsträger in der Scheibe spüren wegen deren Rotation die Lorentz-Kraft F , welche für positive Ladungen nach außen wirkt und den Strom I erzeugt. Diese Anordnung führt je nach Widerstand R zu einem zu- oder abnehmenden Magnetfeld, wie man folgendermaßen sieht.

Die Lorentzkraft $F = q\vec{v} \times \vec{B} = q\Omega r B$ kann auch über ein elektrisches Feld $E = F/q = \Omega r B$ ausgedrückt werden. Diesem Feld entspricht die Potentialdifferenz zwischen Achse und Scheibenrand

$$\varphi = \int E dr \cdot 2\pi = \Omega 2\pi \int r B dr = \Omega B \pi r^2 = \Omega \Phi,$$

wo der Faktor 2π von der Winkelintegration um die Scheibe herum stammt. Diese Potentialdifferenz treibt den Strom I , der durch die Induktionsgleichung beschrieben wird:

$$L \frac{dI}{dt} + RI = M\Omega I \quad \xrightarrow{\text{hat die Lösung}} \quad I(t) = I_0 \cdot e^{(M\Omega - R)t/L}.$$

Je nach Vorzeichen von $M\Omega - R$ nimmt der Strom zu oder ab. Ist $R < M\Omega$, wachsen Strom I und damit auch Magnetfeld B mit der Zeit. Ist also Ω groß genug, d. h. rotiert der Körper schnell genug, so nimmt B mit der Zeit zu.

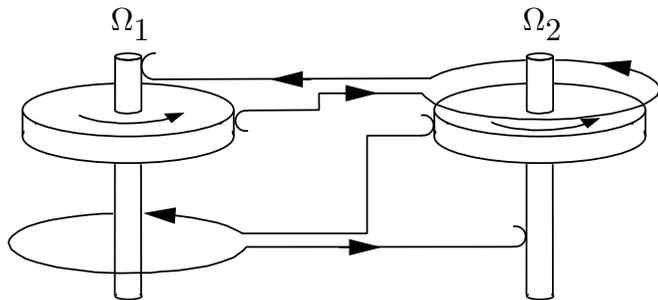
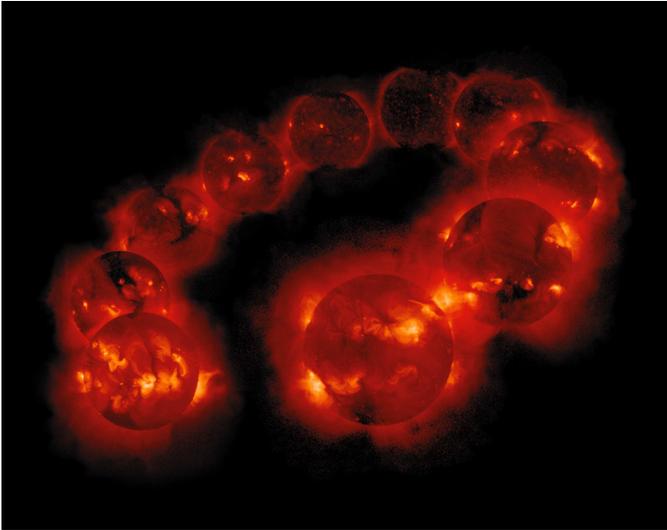
Natürlich ist dieses übervereinfachte³ Beispiel noch sehr verschieden von einem rotierenden flüssigen Körper wie Erde oder Sonne, es kann aber dennoch zwei wesentliche Aspekte eines jeden Dynamos aufzeigen:

- Jeder Dynamo erfordert eine **differentielle Rotation**. Dies ist hier sichtbar an den Schleifkontakten am Rand der Scheibe und an der Achse.
- Ein Dynamo ist **nicht axialsymmetrisch**. In diesem Bild zeigt sich dies an den Kontakten. Irgendwo muss die Axialsymmetrie gebrochen werden⁴.

³Insbesondere stimmt etwas nicht für $R \rightarrow 0$. In diesem Fall müsste nach dem Prinzip des eingefrorenen Magnetfeldes, $\Phi = \text{const.}$ gelten.

⁴Der Satz von Cowling besagt genau dies.

Der Geodynamo von Rikitake



Untersuchungen des Paläomagnetismus wie auch des modernen Erdmagnetfeldes zeigen, dass dieses nie konstant war, sondern dass vielmehr Ausrichtung und Betrag des Dipolmomentes unregelmäßig variieren. Dasselbe gilt für das Magnetfeld der Sonne, welches in der Neuzeit zyklisch (nicht exakt periodisch) seine Polarität ändert. Erde und Sonne sind mit ihrem Verhalten nicht ungewöhnlich. Beobachtungen von anderen Sternen zeigen ähnliche Phänomene.

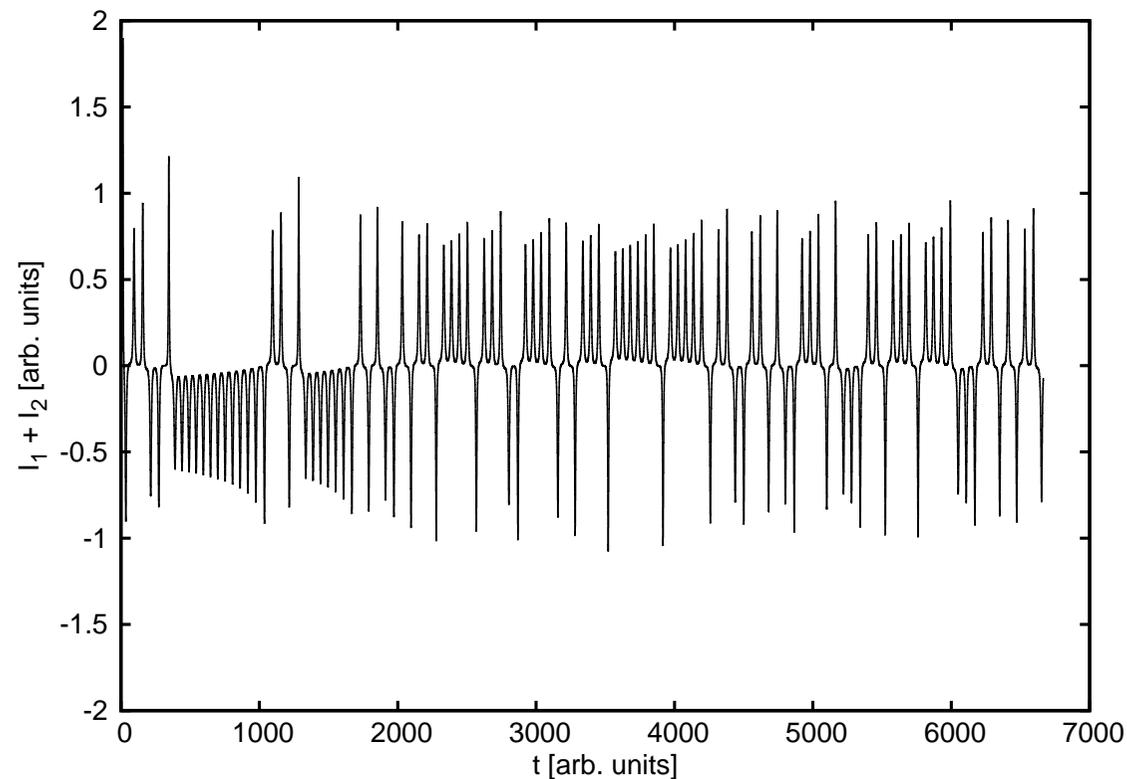
Die hier gezeigte einfache Kombination von zwei homopolaren Dynamos von Rikitake erlaubt es, diese Umpolungen des Magnetfeldes der Erde oder der Sonne qualitativ zu reproduzieren. Mathematisch wird es ähnlich beschrieben

wie der homopolare Dynamo von Bullard,

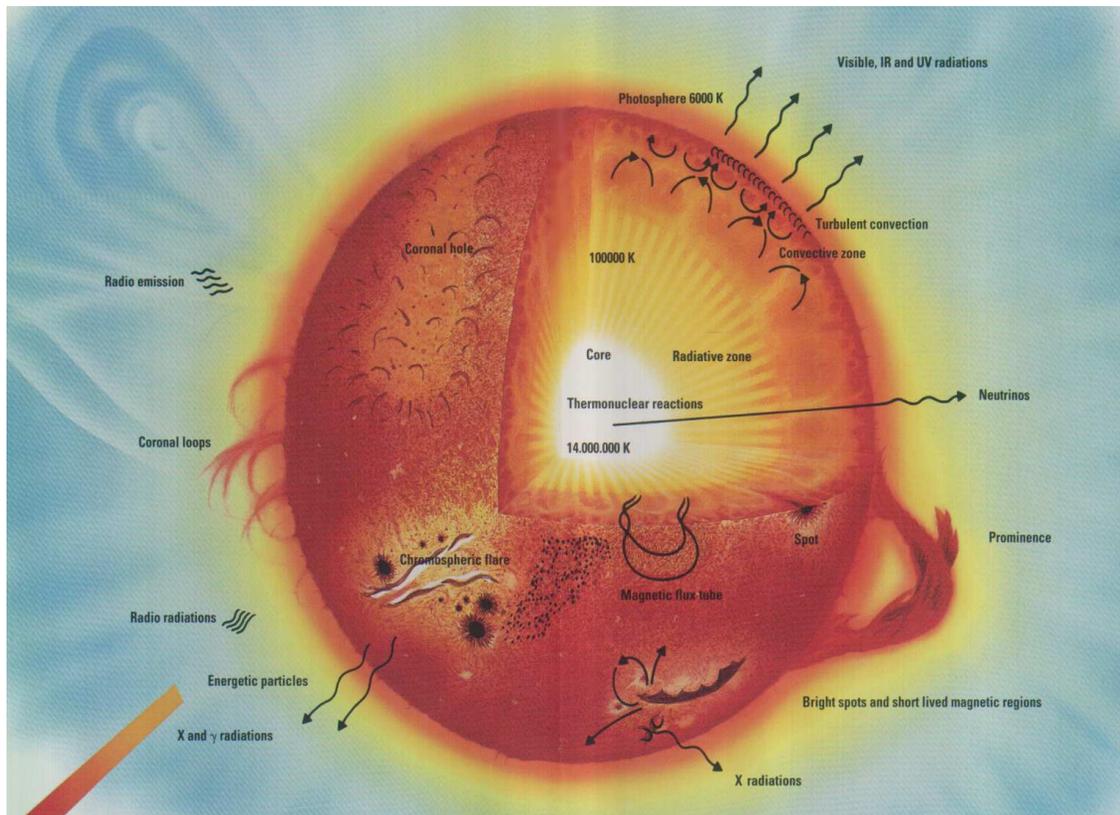
$$\begin{aligned} L \frac{dI_1}{dt} + RI_1 &= M\Omega_1 I_2, & \text{und} & & C \frac{d\Omega_1}{dt} &= G - MI_1 I_2, \\ L \frac{dI_2}{dt} + RI_2 &= M\Omega_2 I_1, & \text{und} & & C \frac{d\Omega_2}{dt} &= G - MI_1 I_2, \end{aligned}$$

wo C das Trägheitsmoment der Scheiben um ihre Achsen und G das auf die Scheiben angewendete Drehmoment ist. Die Nichtlinearität tritt in den beiden Gleichungen rechts auf. Dieses System von nichtlinearen Differentialgleichungen kann analytisch nicht gelöst werden, sehr wohl aber numerisch, jedenfalls wenn die Anfangs- (bzw. Rand-) Bedingungen es zulassen. Nichtlineare Systeme reagieren sehr empfindlich auch kleinste Änderungen der Anfangsbedingungen. Ein Beispiel für eine Lösung ist unten gegeben. Der Geodynamo von Rikitake zeigt das erwartete chaotische Verhalten. Die Richtung des Gesamtstroms wechselt "unvorhersehbar", dazwischen oszilliert der Strom semi-periodisch zwischen stark

und schwach. Die Bedingungen für diese Abbildung waren: $I_1 = 0.9$; $I_2 = 0.2$; $\Omega_1 = 1.05$; $\Omega_2 = 1.0$; $\dot{I}_1 = .51$; $\dot{I}_2 = .1$; $\dot{\Omega}_1 = .1$; $\dot{\Omega}_2 = .001$ und $R/L = .1$; $G/C = 0.01$; $\mu/C = 0.5$.



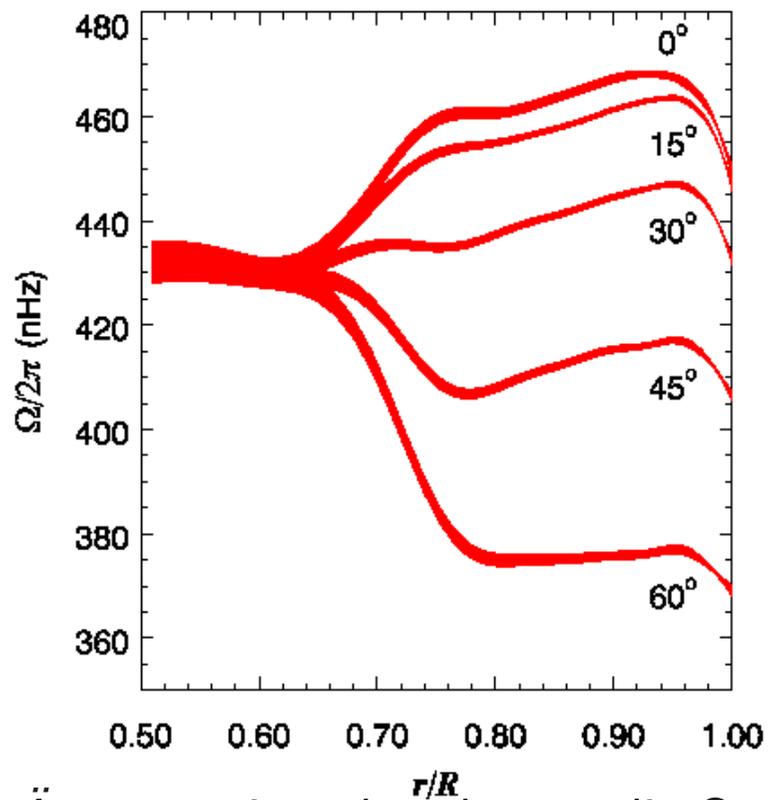
Aufbau der Sonne und Sonnenatmosphäre



Der Aufbau der Sonne ist links dargestellt. Im Kern fusioniert H zu He, die freigesetzte Energie wird durch die Strahlungszone nach außen transportiert. Bis hier rotiert die Sonne als starre Kugel. An der Tachokline findet der Übergang zur konvektiven Zone statt, wo der Dynamo wirkt und die schließlich in der Photosphäre endet. In diesem Bereich rotiert die Sonne differentiell. Daran

schließen die kühle Chromosphäre, Übergangsregion und heiße Korona an.

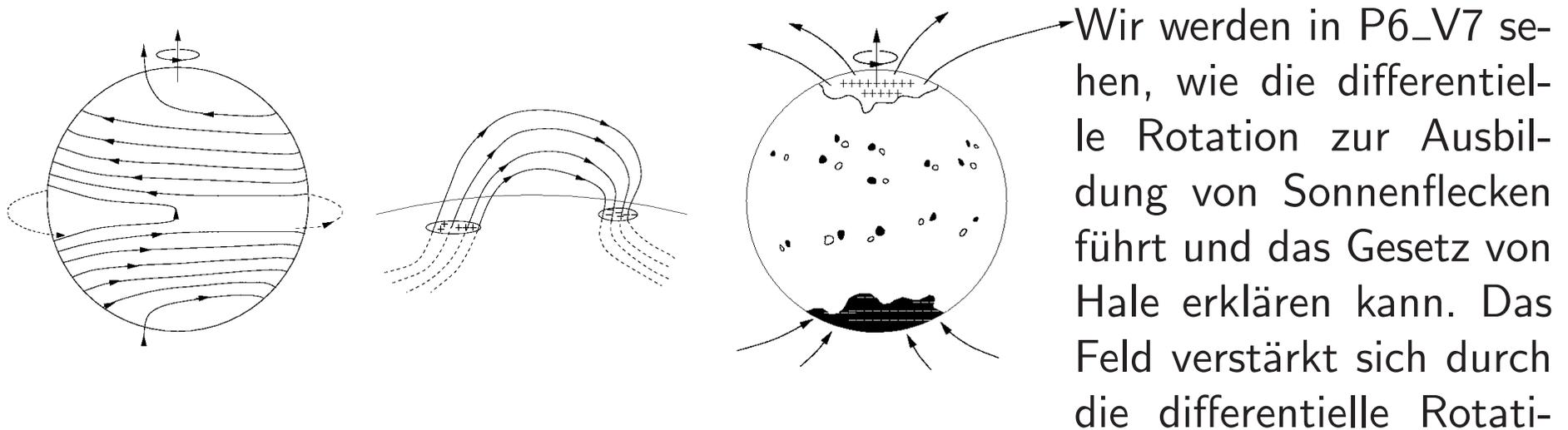
Der solare Dynamo



Das solare Magnetfeld entsteht in der konvektiven Zone, der kritische α -Effekt an der sog. Tachokline. In der Konvektionszone rotiert die Sonne differentiell, wie man links sieht⁵. Am Äquator rotiert die Sonne schneller als an den Polen, der Übergang ist stetig. Der Strahlungskern hingegen rotiert starr, die Übergangszone heißt Tachokline. Durch die differentielle Rotation wird das Magnetfeld am Äquator schneller aufgewickelt, als in hohen Breiten.

Übung 2. Zeigen Sie, dass es weniger als 5 Sonnenrotationen dauert, bis eine Feldlinie am Äquator einmal mehr um die Sonne gewickelt ist als bei 60 Grad Breite.

⁵Quelle: NSF's Solar Observatory (http://soi.stanford.edu/press/GONG_MDI_03-00/)



on. Genauer: Die poloidale Komponente des solaren Magnetfeldes wird in ein toroidales Feld verwandelt und dabei verstärkt. Dies ist der erste Schritt im solaren Dynamo.

$$B_p \xrightarrow{\text{differentielle Rotation}} B_t.$$

Wie kann dieses toroidale Feld aber nun in einem zweiten Schritt wieder in ein poloidales verwandelt werden? Dies war lange eine der großen Schwierigkeiten der Dynamotheorie und ist immer noch ein Streitpunkt.

Der α -Effekt*

Der α -Effekt verwandelt eine toroidale Komponente des Magnetfeldes in eine poloidale. Wir wiederholen dazu die Induktionsgleichung der MHD, Glg. 1,

$$\dot{\vec{B}} = \vec{\nabla} \times \vec{v} \times \vec{B} + \frac{1}{\mu_0 \sigma} \Delta \vec{B}, \quad \longrightarrow \quad \vec{B} = \mathbf{B} + \mathbf{b}, \quad \text{und} \quad \vec{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u},$$

und spalten \vec{B} und \vec{v} wieder in gemittelte und fluktuierende Anteile auf. Setzen wir \vec{B} und \vec{v} so in Glg. 1 ein, so erhalten wir nach etwas Rechnen

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \vec{\nabla} \times \left(\mathbf{v} \times \mathbf{B} + \langle \mathbf{u} \times \mathbf{b} \rangle - \eta \vec{\nabla} \times \mathbf{B} \right), \quad (14)$$

wo $\langle \dots \rangle$ Mittelung bedeute und $\eta = 1/(\mu_0 \sigma)$ die Resistivität des Plasmas ist.

Diese neue Induktionsgleichung enthält das kritische Element für einen Dynamo, den Term $\langle \mathbf{u} \times \mathbf{b} \rangle$, der ein elektrisches Feld $\mathbf{E} = \langle \mathbf{u} \times \mathbf{b} \rangle$ beschreibt. Ist er

genügend groß, kann er jeden diffusiven Term $\eta \vec{\nabla} \times \mathbf{B}$ übertreffen und das gemittelte Magnetfeld \mathbf{B} muss mit der Zeit wachsen. Das Problem ist natürlich, dass \mathbf{E} nicht bekannt ist. Es muss aus $\mathbf{E} = \langle \mathbf{u} \times \mathbf{b} \rangle$ berechnet werden, indem dort die Ausdrücke für \mathbf{b} und \mathbf{u} eingesetzt werden. Diese sind aber nicht bekannt.

Man kann nun zeigen, dass dieses neue elektrische Feld geschrieben werden kann als

$$\mathbf{E} = \alpha \mathbf{B} - \beta \vec{\nabla} \times \mathbf{B} + \dots \quad (15)$$

Setzen wir diesen Ausdruck in die Gleichung für die Entwicklung des gemittelten Feldes (Glg. 14) ein, so erhalten wir

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \vec{\nabla} \times \left(\mathbf{v} \times \mathbf{B} + \alpha \mathbf{B} - \eta_t \vec{\nabla} \times \mathbf{B} \right), \quad \text{wo } \eta_t = \eta + \beta. \quad (16)$$

Gleichung 16 bestimmt das mittlere Feld \mathbf{B} , genau wie es die Induktionsgleichung (1) tat. Nur können wir jetzt explizit verfolgen, welche *gemittelten* Terme zu einem

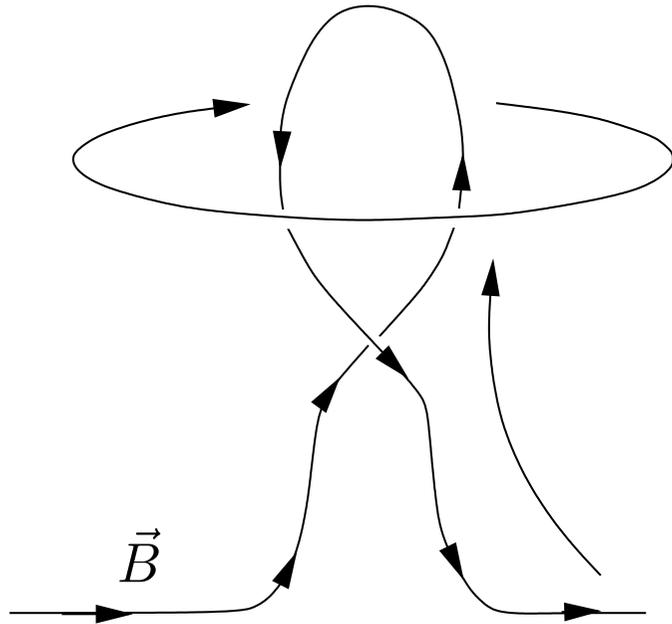
Anwachsen des Feldes und welche zu einem Abklingen führen. Die Kenntnis der statistischen Eigenschaften der fluktuierenden Größen steckt ausschließlich in α und β . Zur Bestimmung des mittleren Feldes ist also “nur” noch die Kenntnis von α und β erforderlich. Die Erhöhung der Diffusivität $\eta_t = \eta + \beta$ hat ein schnelleres Abklingen des Feldes zur Folge, welches aber durch den zusätzlichen α Term mehr als aufgewogen werden kann.

Der wesentliche Punkt hier ist der neue α -Term, der den α -**Effekt** beschreibt. Er führt zu einem Feld-parallelen Strom \vec{j} parallel zu \mathbf{B} , der wiederum ein Magnetfeld hervorruft, welches nach dem Faradayschen Gesetz poloidal sein muss. Wir haben also den Ring geschlossen:

$$B_p \xrightarrow{\text{differentielle Rotation}} B_t \xrightarrow{\alpha\text{-Effekt}} B_p$$

und können, je nach Stärke des α -Effektes, das Magnetfeld der Sonne aufrecht-erhalten.

Der α -Effekt – II²



Wie erzeugt man denn den feldparallelen Strom, der für den α -Effekt benötigt wird? Wie links angedeutet, muss dazu das Feld “verdrehen” werden. Die Schleife in der oberen Hälfte erzeugt genau den feldparallelen Strom.

Die Schwierigkeit besteht nun darin, einen Ort auf oder in der Sonne zu finden, an welchem der α -Effekt genügend stark ist, um den Dynamo aufrecht zu erhalten.

Das Verdrehen der Feldlinien gibt dem Feld eine neue Eigenschaft, die Helizität⁶. Ein Feld kann

linkshändig, rechtshändig oder gar nicht verdrillt sein. Der α -Effekt verpasst dem Feld eine Händigkeit oder Helizität.

⁶Das ist - im Wesentlichen - die Händigkeit

Exkurs – Helizität*

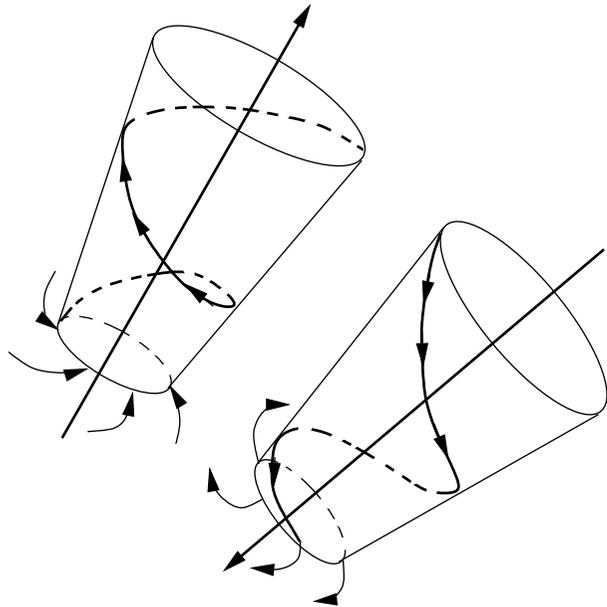
Ist eine Magnetfeldkonfiguration wie ein Seil verdreht, das Feld “dreht sich um sich selber”, so hat sie eine sog. **Helizität**, bzw. **magnetische Helizität**. Ein links-gedrehtes Seil hat negative, ein rechts-gedrehtes positive Helizität. Formal ist die Helizität definiert als

$$H \doteq \int_V \vec{A} \cdot \vec{B} d^3r, \quad (17)$$

wo \vec{B} die magnetische Feldstärke, V das Volumen und $\vec{A} = \vec{\nabla} \times \vec{B}$ das Vektorpotential von \vec{B} ist. Diese Größe ist ein Analogon zur Helizität in der Hydrodynamik, also von bewegten Flüssigkeiten

$$H_h \doteq \int_V \vec{u} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{u}) d^3r, \quad \text{wo } \vec{u} \text{ die Geschwindigkeit ist.} \quad (18)$$

Der α -Effekt – III*



Parker⁷ hat hierfür den ersten entscheidenden Schritt getan. In auf- und absteigenden Gebieten der Nordhemisphäre erhalten Plasmapakete wegen der Corioliskraft eine linkshändige (negative) Helizität. Die Divergenz am unteren Ende der absinkenden und die Konvergenz am unteren Ende der aufsteigenden Röhren erzeugen aber eine rechtshändige (positive) Helizität. Damit scheint der α -Effekt auch in der Tachokline angesiedelt zu sein, weil nur hier die Helizität geändert werden kann. Eine Abschätzung der

Größenordnung von α ist schwierig, in der Literatur sind Werte zwischen wenigen cm/s und 100 m/s zu finden.

⁷Eugene Parker, der als erster den Sonnenwind theoretisch berechnet hat.