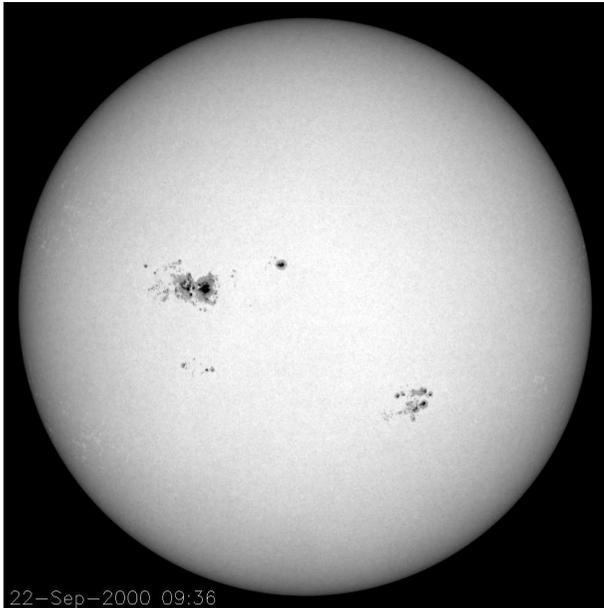


Potentialfelder



Das Gesetz von Ampère lautet

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}. \quad (1)$$

Übung 1. Zeigen Sie anhand einer Skalenabschätzung, dass bei den langsamen Bewegungen auf der Sonne und in der Korona der Verschiebungsstrom

ESA/NASA/MDI: Sonnen-vernachlässigt werden darf.

flecken am 20. Sept. 2000. Wie groß sind sie?

In der Korona lautet das Ampèresche Gesetz also

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j}, \quad (2)$$

und das (vereinfachte) Ohmsche Gesetz lautet

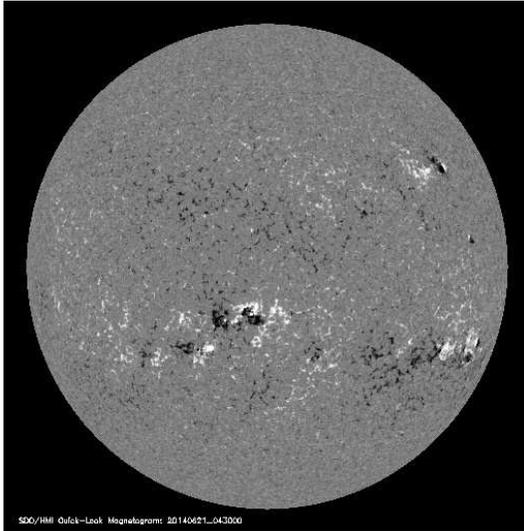
$$\vec{j} = \sigma \vec{E}' = \sigma \left(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B} \right), \quad (3)$$

wo \vec{E}' das totale elektrische Feld in einem sich mit dem Plasma bewegenden Bezugssystem ist.

Unter der Annahme, dass die Ströme des solaren Dynamos wesentlich größer sind, als Ströme in der Korona, kann man das Magnetfeld in der Korona als **Potentialfeld** schreiben. Es ist nicht mehr notwendig, \vec{B} durch ein Vektorpotential $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$ auszudrücken, es reicht

$$\vec{B} = -\vec{\nabla}\Phi. \quad (4)$$

Wegen $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$ muss ein solches Potentialfeld \vec{B} auch die Laplacegleichung $\vec{\nabla}^2 \Phi = \Delta \Phi = 0$ erfüllen.



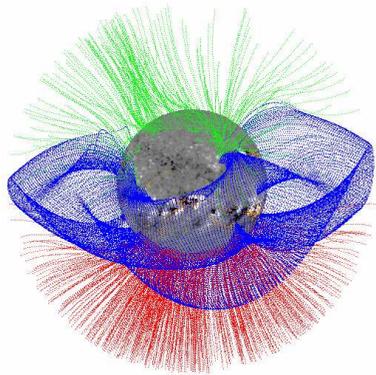
Wenn wir umgekehrt annehmen, dass \vec{B} als Potentialfeld ausgedrückt werden kann und, wie Sie zeigen werden, der Verschiebungsstrom $\varepsilon_0 \partial \vec{E} / \partial t$ vernachlässigt werden darf, so folgt, dass ein Potentialfeld auch stromfrei ist: $\mu_0 \vec{j} = \vec{\nabla} \times \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \Phi = 0$. Das globale koronale Magnetfeld kann bestimmt werden, indem man die Laplacegleichung löst. Dabei wird das photosphärische Magnetfeld (in der Abb. links¹ gezeigt.) als innere Randbedingung (Neumann Randbedingung) genommen und z. B. gefordert, dass ab einer Höhe r_w das Feld radial sein soll. Eine Lösung ist gegeben durch

$$\Phi(r, \theta, \phi) = r_{\odot} \sum_{l=1}^N \sum_{m=0}^l f_l(r) P_l^m(\theta) (g_l^m \cos m\phi + h_l^m \sin m\phi), \quad (5)$$

¹Quelle: NASA/SDO/HMI

wo die Funktion $f_l(r)$ durch gegeben ist durch

$$f_l(r) \doteq \frac{(r_w/r)^{l+1} - (r/r_w)^l}{(r_w/r_\odot)^{l+1} - (r_\odot/r_w)^l}.$$



Offensichtlich gilt $f_l(r = r_w) = 0$, ab diesem Abstand ist das Feld radial. Die Idee dahinter ist natürlich, dass wir annehmen, dass ab einem gewissen Abstand (r_w eben) der supersonische und unendlich leitfähige Sonnenwind das Feld radial mit nach außen reißt. Die Funktionen $P_l^m(\theta)$ sind die üblichen Legendre-Polynome, wie sie bei Lösungen in Kugelkoordinaten oft auftreten. Die Amplituden der einzelnen Multipole in der Entwicklung

(Glg. 5) werden durch die Koeffizienten g_l^m und h_l^m bestimmt. Diese werden durch eine χ^2 Anpassung an das photosphärische Magnetfeld (bei $r = r_\odot$) bestimmt. In der Abb. zeigen die blauen Linien die “letzten” geschlossenen Feldlinien, orange ist geschlossen, rot und grün sind Linien negativer und positiver Polarität.

Kräftefreie Felder

Die Bewegungsgleichung der MHD lautet

$$mn \frac{d\vec{v}}{dt} = -\vec{\nabla} \cdot \Pi + \rho \vec{E} + \vec{j} \times \vec{B}.$$

Verschwundet die linke (oder rechte) Seite, so treten im Plasma keine Kräfte auf. Elektrische Felder treten wegen der hohen Mobilität von Elektronen in der Regel nie auf. Kann man den Druckgradienten vernachlässigen, wie z.B. in der niedrigen Korona, so spielt nur noch die Lorentzkraft eine Rolle. Eine kräftefreie Situation stellt sich somit dann ein, wenn der $\vec{j} \times \vec{B}$ -Term verschwindet.

$$\vec{j} \times \vec{B} = 0. \quad (6)$$

Mit dem Ampèreschen Gesetz $\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$ können wir diese Bedingung auch

schreiben als

$$\left(\vec{\nabla} \times \vec{B}\right) \times \vec{B} = 0. \quad (7)$$

Dies ist eine nicht-lineare Gleichung deren Lösung ein kräftefreies Feld im oben definierten Sinn ergibt. Die Lösung ist in der Regel nicht trivial, weil nicht linear. Die Gleichung besagt, dass die Rotation des Feldes parallel oder anti-parallel zum Feld ist, was man sich schwer vorstellen kann. Wir diskutieren deshalb im folgenden Abschnitt eine solche Konfiguration.

Lineare kräftefreie Felder

Eine lineare Version von Glg. 7 kann bestimmt werden, indem wir

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j} = \alpha(\vec{r}) \vec{B} \quad (8)$$

setzen, wo $\alpha(\vec{r})$ vorerst eine skalare, ortsabhängige und evtl. sogar zeitabhängige Funktion sei. Der Fall mit $\alpha(\vec{r}) \neq 0$ beschreibt also eine Feldkonfiguration, die *nicht* durch ein Potentialfeld beschrieben werden kann. Die Wahl von $\alpha(\vec{r})$ und damit der Feldkonfiguration wird durch zwei Bedingungen eingeschränkt. Einerseits muss das Feld stets divergenzfrei bleiben, $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$, wie auch die Divergenz der Stromdichte und folglich $\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{B}) = 0$, also

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{B}) = \vec{\nabla} \cdot (\alpha(\vec{r}) \vec{B}) = \alpha (\vec{\nabla} \cdot \vec{B}) + \vec{B} \cdot \vec{\nabla} \alpha(\vec{r}) = \vec{B} \cdot \vec{\nabla} \alpha(\vec{r}) = 0. \quad (9)$$

Diese Bedingung wird erfüllt, wenn $\alpha(\vec{r})$ konstant entlang einer Feldlinie ist und damit entlang dieser immer $\vec{\nabla}\alpha = 0$ gilt. Deshalb muss entlang jeder Feldlinie gelten, dass

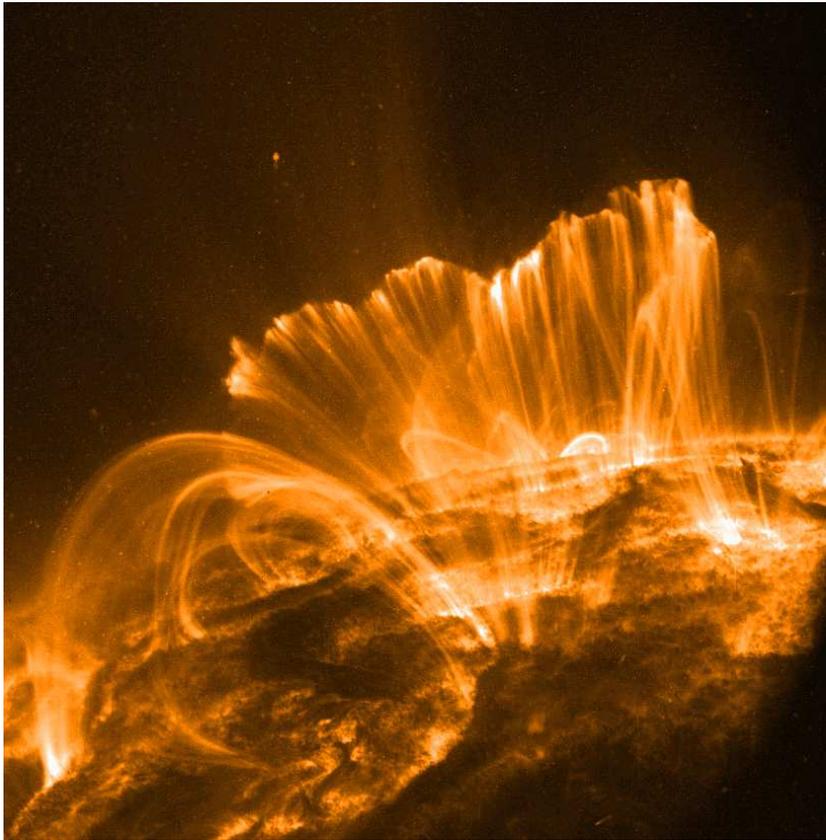
$$\left(\vec{\nabla} \times \vec{B}\right) = \alpha \vec{B}. \quad (10)$$

Benachbarte Feldlinien können verschiedene Werte für α aufweisen.

Übung 2. *Zeigen sie, dass für ein kräftefreies Feld nach Glg. 10 und mit ortsunabhängigem α die Helmholtz-Gleichung gilt*

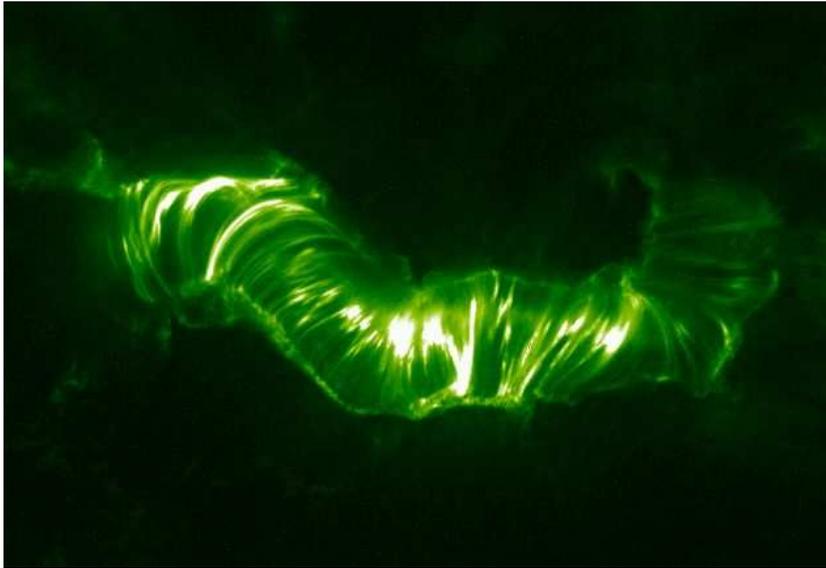
$$\Delta \vec{B} + \alpha^2 \vec{B} = 0. \quad (11)$$

Koronale Arkaden*



Ein Beispiel für eine lineare kräftefreie Feldkonfiguration sind die sog. **koronalen Arkaden** bzw. Schleifen oder “loops”, die sich oft nach einer Eruption (einem koronalen Massenauswurf) in der zurückbleibenden Korona bilden. Sie sind von oben als parallel ausgerichtete Schleifen sichtbar, getrennt durch eine Neutrallinie. Treten nun auf beiden Seiten der Neutrallinie Scherbewegungen auf (parallel zur Neutrallinie, antiparallel zueinander), so entsteht eine **gescherte Arkade**. Je stärker die Scherung ist, desto größer ist der Winkel zur Senkrechten auf die Neutral-

linie und desto stärker wird die Nicht-Potential-Natur des Feldes.



Eine mathematisch einfache Konfiguration ist gegeben durch

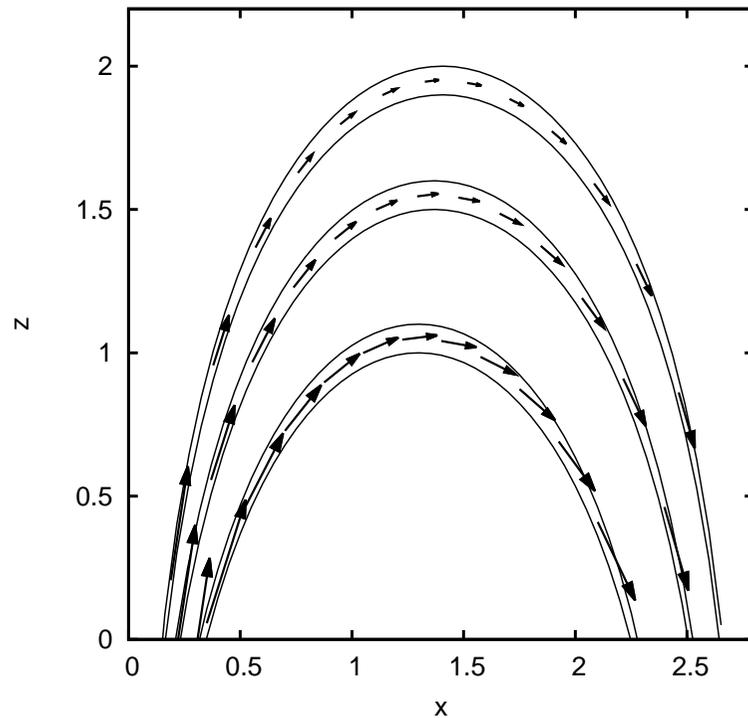
$$\begin{aligned} B_x &= B_{x0} \sin(kx) \exp(-lz), \\ B_y &= B_{y0} \sin(kx) \exp(-lz), \\ B_z &= B_0 \cos(kx) \exp(-lz). \end{aligned} \quad (12)$$

Davon können wir leicht die Rotation bilden,

$$\begin{aligned} (\vec{\nabla} \times \vec{B})_x &= \partial_y B_z - \partial_z B_y = l B_{y0} \sin(kx) \exp(-lz), \\ (\vec{\nabla} \times \vec{B})_y &= \partial_z B_x - \partial_x B_z = (-l B_{x0} + k B_0) \sin(kx) \exp(-lz), \\ (\vec{\nabla} \times \vec{B})_z &= \partial_x B_y - \partial_y B_x = k B_{y0} \cos(kx) \exp(-lz). \end{aligned} \quad (13)$$

Als nächstes setzen wir die Bedingung 10 für ein lineares kräftefreies Feld ein und

erhalten



$$\begin{aligned} lB_{y0} &= \alpha B_{x0}, \\ (-lB_{x0} + kB_0) &= \alpha B_{y0}, \\ kB_{y0} &= \alpha B_0. \end{aligned} \quad (14)$$

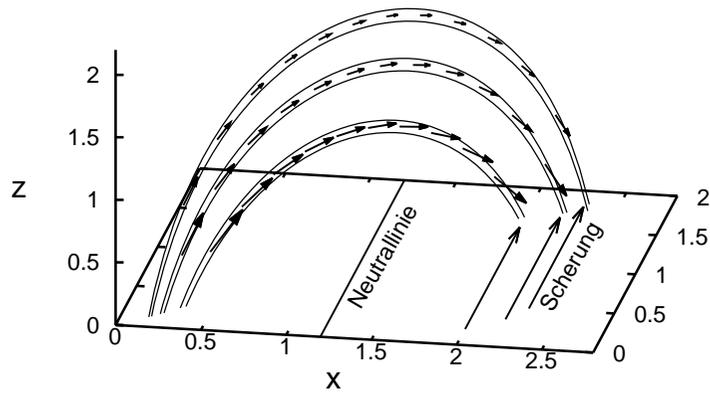
Diese drei Gleichungen bestimmen die Feldkomponenten B_{x0} und B_{y0} und ergeben eine einschränkende Bedingung an die sonst frei wählbaren Parameter α , l und k ,

$$\begin{aligned}
B_{x0} &= \frac{l}{k} B_0, \\
B_{y0} &= \frac{\alpha}{k} B_0, \\
k^2 - l^2 - \alpha^2 &= 0.
\end{aligned} \tag{15}$$

Gleichung 15 entspricht gerade der Bedingung 11. Wenn wir die z -Komponenten als nach oben zeigend definieren, so ist der Scherwinkel gegeben durch

$$\tan \theta = \frac{B_y}{B_x} = \frac{B_{y0}}{B_{x0}} = \frac{\alpha}{l}. \tag{16}$$

Der Scherwinkel ist also ein gutes Maß dafür, ob das Feld als Potentialfeld genähert werden darf. Für $\theta = 0$ ist $\alpha = 0$ und das Feld ist ein Potentialfeld.



Je größer der Scherwinkel θ , desto schlechter ist die Potentiallösung, bzw. desto notwendiger ist eine Beschreibung durch ein kräftefreies Feld.

y Diese Feldkonfiguration kann durch die Proportionalitätsbeziehungen

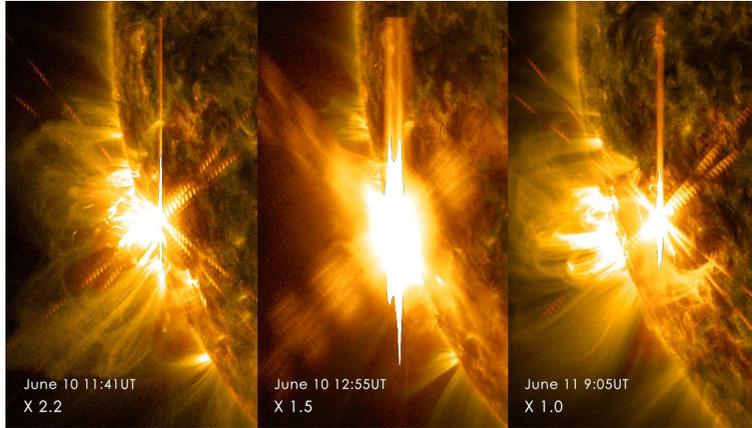
$$\frac{dx}{B_x} = \frac{dy}{B_y} = \frac{dz}{B_z} \quad (17)$$

gefunden werden. Einsetzen der Lösungen gibt

$$y(x) = \frac{\alpha}{l}x + y_0 \text{ und } z(x) = \frac{k}{l} \log [\sin(kx)] + z_0, \text{ wo } k^2 - l^2 - \alpha^2 = 0. \quad (18)$$

Übung 3. Zeigen Sie dies! Die beiden letzten Abbildungen wurden so erzeugt.

Solare Flares



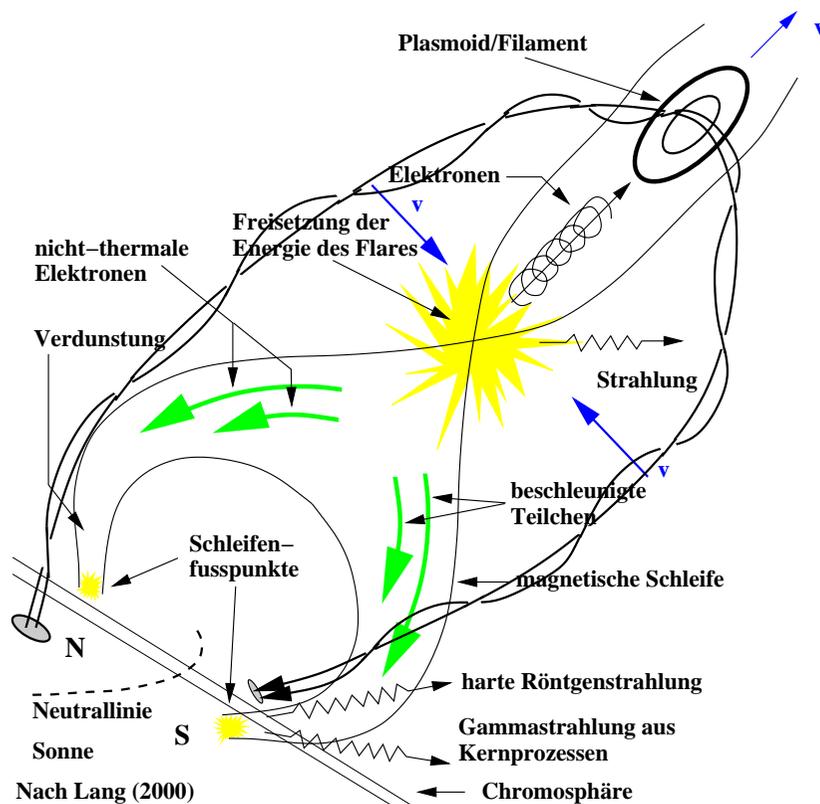
Klasse	P [W/m ²]
A	$< 10^{-7}$
B	$10^{-7} - 10^{-6}$
C	$10^{-6} - 10^{-5}$
M	$10^{-5} - 10^{-4}$
X	$> 10^{-4}$

Am 10./11.06.2014 hat die Sonne innerhalb von 24 Stunden aus derselben Region drei intensive Röntgenflares der X-Klasse erzeugt. Deren Klassifizierung ist links angegeben, die Werte werden bei der Erde im Wellenlängenbereich zwischen 1 und 8 Å gemessen. In einigen Sekunden bis Stunden werden Leistungen von typisch 10^{20} W freigesetzt.

Übung 4. *Vergleichen Sie dies mit der Gesamtleistung der Sonne und überlegen Sie sich, ob die Leistungsdichte (W/m^2) im Röntgenbereich groß oder klein ist².*

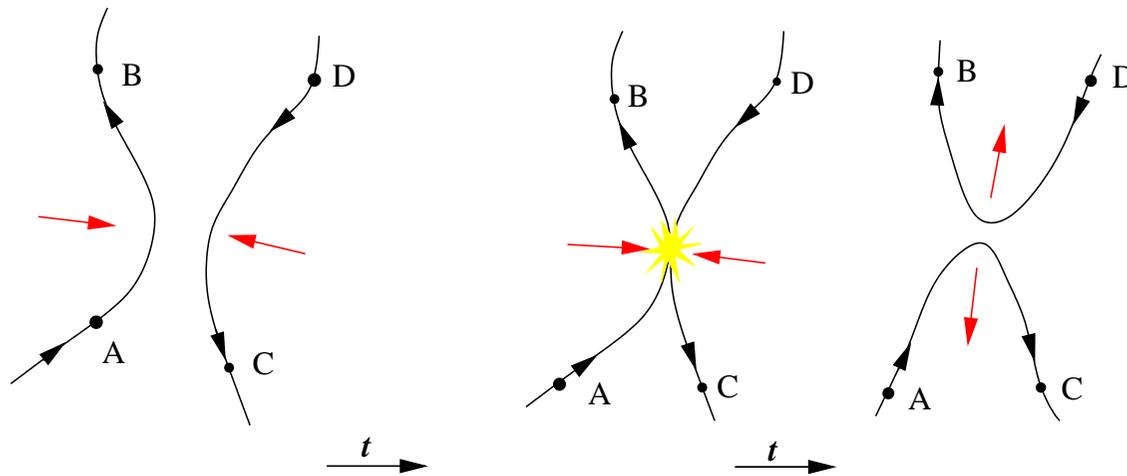
²Eine Röntgenaufnahme beim Zahnarzt dauert ca. 5 Sekunden und entspricht ca. 0.005 mSv.

Rekonnektion in Flares



In Flares werden innerhalb von 10 - 100 Sekunden typischerweise 10^{23} J freigesetzt und zwischen 1 und 10% (oft auch 100%) aller verfügbaren Elektronen auf Energien von etwa 100 keV beschleunigt, die das Plasma energetisch dominieren. Deren Entweichen führt zu intensiver Radioemission. Treffen sie auf die Chromosphäre, entsteht durch Bremsstrahlung harte Röntgenstrahlung. Ionen werden auch beschleunigt (manchmal auf relativistische Energien), deren Wechselwirkung mit chromosphärischem Plasma führt zu Gammastrahlung. U.U. führen sie auf der Erde zu einem "Ground Level Enhancement" (GLE).

Magnetische Rekonnektion



Wie kommt es zu solchen Erscheinungen in der Korona? Wie kann die Sonne innert kurzer Zeit so intensive Röntgenstrahlung abgeben? Beobachtungen im Röntgenbereich zeigen, dass dies auch allgemein für Koronae vieler Sterne gilt³.

Die beste Erklärung liefert heute die sog. magnetische Rekonnektion, die hier illustriert ist. Flares werden dadurch erklärt, dass sich das koronale Magnetfeld in kurzer Zeit neu konfiguriert und dabei über längere Zeit akkumulierte Energie freigesetzt wird.

³Interessanterweise ist die Sonne für ihren Typ (G) besonders röntgenschwach.

Die Induktionsgleichung der MHD

Um Rekonnektion zu verstehen müssen wir uns die Induktionsgleichung der MHD anschauen. Wir verbinden die Gesetze von Ampère und Ohm in der Näherung, dass der Verschiebungsstrom vernachlässigt werden kann,

$$\vec{j} = \frac{1}{\mu_0} \vec{\nabla} \times \vec{B} = \sigma \left(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B} \right), \text{ wo } \sigma \doteq \frac{ne^2}{m_e \nu} \quad (19)$$

die elektrische Leitfähigkeit des Plasmas und ν die Stoßfrequenz im Plasma ist. Wir bestimmen die Rotation von Glg. 19 und verwenden das Faradaysche Gesetz $\dot{\vec{B}} = -\vec{\nabla} \times \vec{E}$ und erhalten die Induktionsgleichung der MHD:

$$\dot{\vec{B}} = \vec{\nabla} \times \vec{v} \times \vec{B} + \frac{1}{\mu_0 \sigma} \Delta \vec{B}. \quad (20)$$

Dabei haben wir die Vektoridentität $\nabla \times \nabla \times B = \nabla(\nabla \cdot B) - \Delta B = -\Delta B$ verwendet (“rot rot gleich grad div - Laplace”).

Für sehr schlechte (kleine) Leitfähigkeit oder bei sehr langsamen Bewegungen im Plasma wird die Induktionsgleichung zu einer Diffusionsgleichung

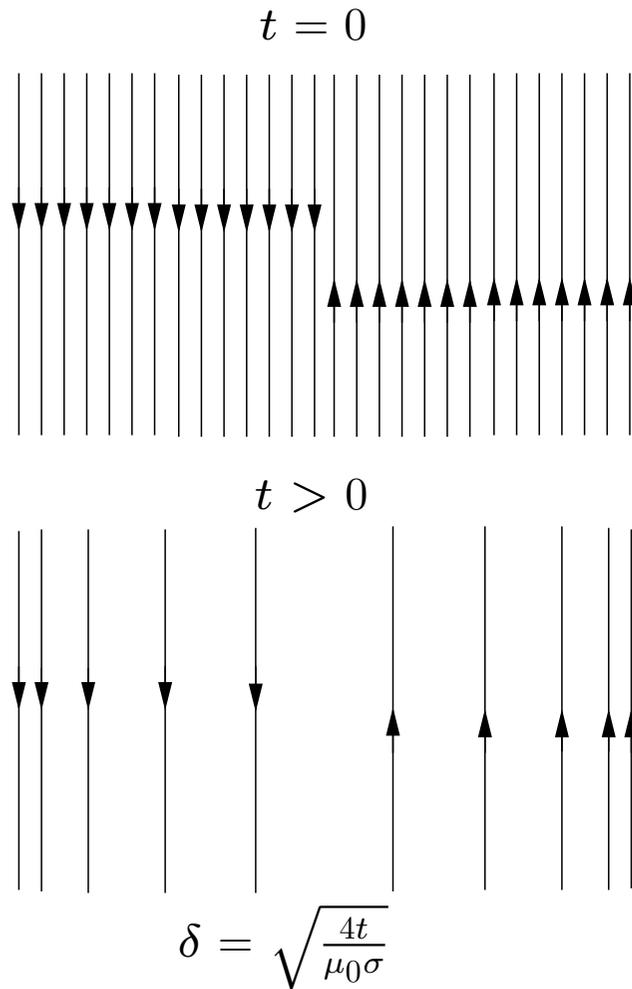
$$\dot{\vec{B}} = \frac{1}{\mu_0 \sigma} \Delta \vec{B} \quad (21)$$

weil dieser Term den Bewegungsterm in diesem Falle dominiert. Die Größe $1/(\mu_0 \sigma)$ heisst magnetische Diffusivität. Wir können aus Glg. 21 eine Diffusionszeit abschätzen,

$$\left[\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right] = \left[\frac{1}{\mu_0 \sigma} \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial r^2} \right] \implies \tau_{\text{diff}} = \mu_0 \sigma L^2, \quad (22)$$

wo L eine typische Längenskala ist.

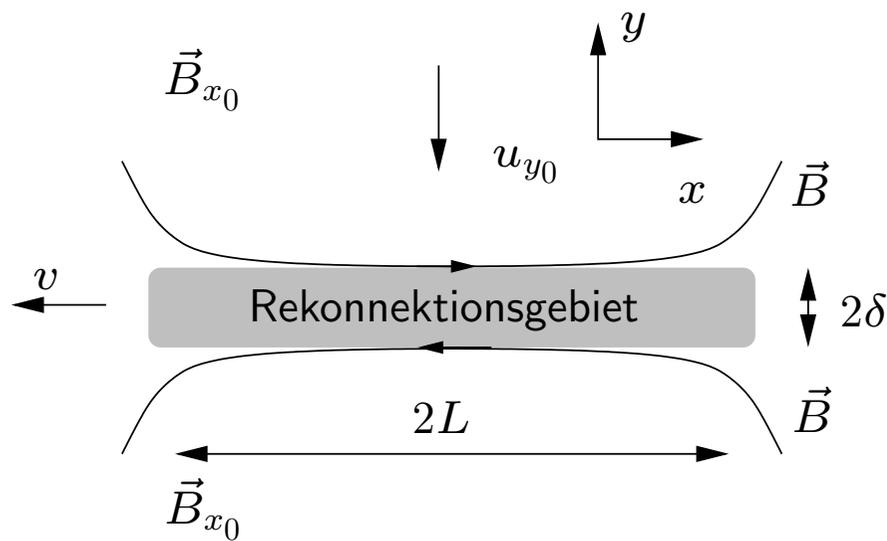
Sweet-Parker Rekonnektion



Im Rekonnektionsprozess werden magnetische Feldlinien entgegengesetzter Polarität durch Diffusion in Energie umgewandelt. Die soeben behandelte Diffusionsgleichung $\partial \vec{B} / \partial t = \Delta \vec{B} / \mu_0 \sigma$, hat in einer Dimension die Lösung

$$B = \sqrt{\frac{\mu_0 \sigma}{4t}} e^{-\frac{x^2 \mu_0 \sigma}{4t}} \implies v_{1/e} = \sqrt{\frac{4}{\mu_0 \sigma t}}$$

Das Feld diffundiert weg und die Orte mit Feldstärke $1/e$ bewegen sich mit einer Geschwindigkeit $v_{1/e}$ von der Stromschicht weg. Die Feldstärke in der Region der Stromschicht wird immer kleiner, die Differenz wird als Energie $B^2 / 2\mu_0$ freigesetzt.



Die Geschwindigkeit der Umsetzung von Feld in Energie kann abgeschätzt werden, indem man sich überlegt, wie schnell Feld in die Rekonnektionsregion, die auch eine Stromschicht ist, hineintransportiert werden kann. Der Strom ist gegeben durch

$$\vec{j} = \frac{2B_{x0}}{2\delta\mu_0} \quad \text{und} \quad \vec{j} = \sigma E_z = -\sigma u_{y0} B_{x0}$$

weil es in dieser Geometrie nur eine z -Komponente des elektrischen Feldes geben kann. Daraus können wir die Anströmgeschwindigkeit u_{y0} berechnen,

$$|u_{y0}| = \frac{E_z}{B_{x0}} = \frac{j}{\sigma B_{x0}} = \frac{2B_{x0}}{2\delta\mu_0} \frac{1}{\sigma B_{x0}} = \frac{1}{\mu_0\sigma\delta}$$

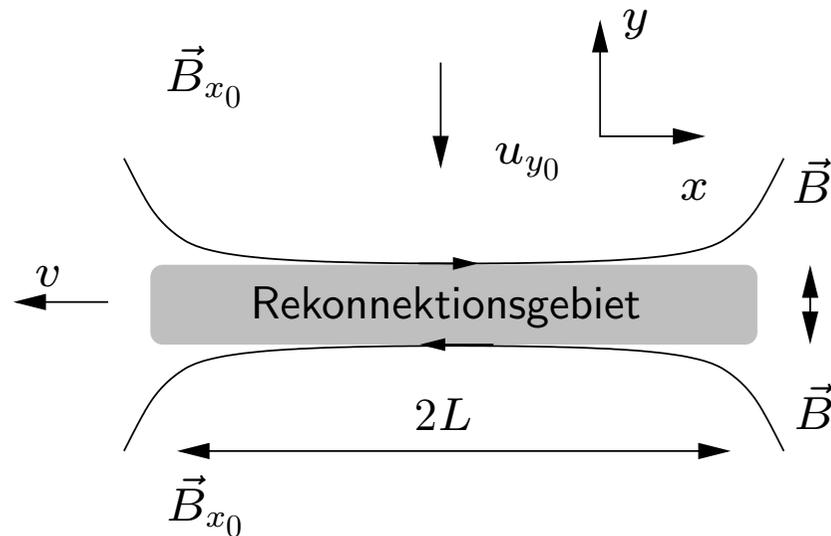
Wir vergleichen nun diese Geschwindigkeit mit der Diffusionsgeschwindigkeit, die wir folgendermaßen abschätzen. Die Diffusion braucht eine Zeit T um die Dicke δ zu durchqueren:

$$\delta = \int_0^T \frac{dt}{\sqrt{4\mu_0\sigma t}} \xrightarrow{(\quad)^2} v_{\text{diff}} = \frac{\delta}{T} = \frac{1}{\mu_0\sigma\delta}. \quad (23)$$

Die Anströmgeschwindigkeit ist also gerade gleich der Diffusionsgeschwindigkeit und wir haben eine stationäre Situation.

Dieses Szenario ist problematisch. Woher weiss das anströmende Plasma von der Diffusionsgeschwindigkeit im Rekonnektionsgebiet? Ferner zeigt sich, dass die Annihilationsrate für das Magnetfeld ein bis zwei Größenordnungen niedriger, als für die Erklärung von Flares erforderlich ist.

Wie schnell ist die Sweet-Parker Rekonnektion?



Mit der Kontinuitätsgleichung können wir die Anströmgeschwindigkeit mit der Ausströmgeschwindigkeit v vergleichen,

$$2\delta \quad u_{y0} L = v\delta, \text{ wo nach Bernoulli } \frac{\rho v^2}{2} = p - p_0,$$

wo ρ und p die Dichte und der Druck im Rekonnektionsgebiet und p_0 im ungestörten Plasma sind⁴. Das Rekonnektionsgebiet soll im hydrostatischen Gleichgewicht mit der Umgebung sein, deshalb gilt auch $p - p_0 = B_{x0}^2 / 2\mu_0$. Aus diesen

⁴Die Vernachlässigung von $B^2 / 2\mu_0$ macht das Resultat um einen Faktor 2 unsicher.

Überlegungen finden wir

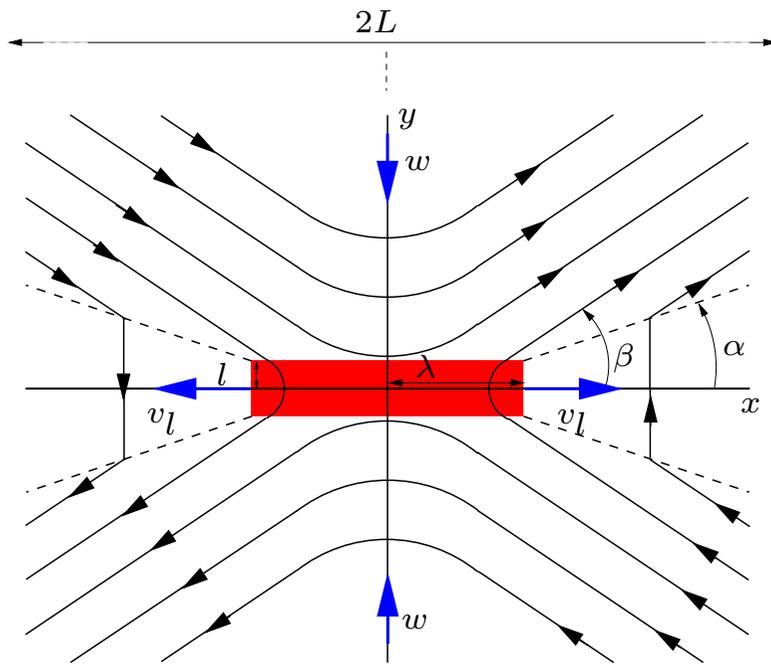
$$u_{y0} = \sqrt{\frac{B_{x0}^2}{\mu_0 \rho}} \cdot \frac{\delta}{L} \xrightarrow{\delta \text{ aus Glg. 23}} u = \left(\frac{B_{x0}}{\sqrt{\mu_0 \rho}} \frac{1}{\mu_0 \sigma L} \right)^{1/2}.$$

Wir bestimmen nun die Alfvénsche Machzahl M_0 indem wir durch die Alfvéngeschwindigkeit $v_A \doteq B_{x0} / \sqrt{\mu_0 \rho}$ dividieren

$$M_0 = \frac{u_{y0}}{v_A} = \left(\frac{1}{v_A} \frac{1}{\mu_0 \sigma L} \right)^{1/2} = \sqrt{\frac{1}{R_M}},$$

wo R_M die magnetische Reynoldszahl ist. Die Rekonnektion geht sehr langsam vor sich, denn die magnetische Reynoldszahl ist für die Korona, wie für die meisten astrophysikalischen Plasmen, sehr groß. Dies ist die Hauptschwierigkeit des hier vorgestellten Modells von Sweet und Parker.

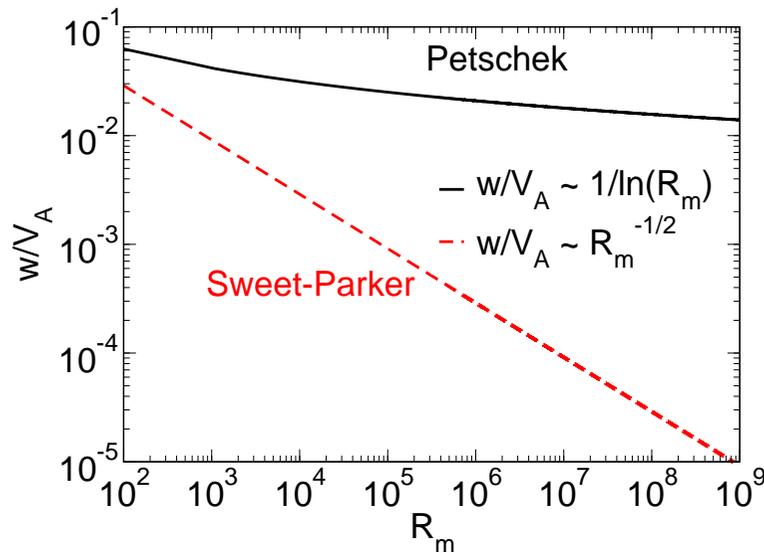
Petschek-Reconnection*



Petschek hat diese Schwierigkeit gelöst, indem er in größeren Abständen von der Rekonnectionsregion Wellen als Rekonnectionsagenten eingesetzt hat, wie in der Abb. illustriert. Dadurch kann die effektive Rekonnectionsregion viel kleiner als L werden, was wiederum eine höhere Anströmgeschwindigkeit erlaubt. Die Ausflussgeschwindigkeit ist die Alfvéngeschwindigkeit. Wenn $\lambda \sim l$ sagt uns die Kontinuitätsgleichung

$$w = v_a \frac{l}{\lambda},$$

dass wir sehr schnelle Rekonnection haben können.



Wenn wir als Extremfall für die Anströmgeschwindigkeit in unmittelbarer Nähe der Rekonnktionsregion wieder die Diffusionsgeschwindigkeit nehmen, finden wir

$$\lambda \cdot \frac{1}{\mu_0 \sigma l} = v_A l \longrightarrow l^2 = \frac{\lambda^2}{\mu_0 \sigma v_a \lambda} = \frac{\lambda^2}{R_M},$$

wo $R_M = v_A \mu_0 \sigma \lambda$ die magnetische Reynoldszahl im Rekonnktionsgebiet ist. Damit muss λ immer noch größer sein als l , aber nicht viel. Detaillierte Rechnungen für die Anströmgeschwindigkeit zeigen, dass

$$\frac{w}{v_a} \approx \frac{\pi}{4e \ln R_M}.$$

Dies ist in der Abbildung dargestellt und wesentlich schneller als die Sweet-Parker Rekonnktion.