

Physik VI
Plasmaphysik und Extraterrestrische Physik
Teil II - Extraterrestrische Physik



Skriptum zu Vorlesung von Robert F. Wimmer-Schweingruber
Sommersemester 2008 und 2011

Robert F. Wimmer-Schweingruber
Institut für Experimentelle und Angewandte Physik
AG Extraterrestrik
Leibnizstrasse 11, D-24118 Kiel

Inhaltsverzeichnis

1	Einführung	7
1.1	Polarlichter – eine spektakuläre Erscheinung am polaren Nachthimmel	7
2	Planetare Atmosphären	11
2.1	Struktur von Atmosphären	12
2.1.1	Kräfte auf Luftmassen	17
2.1.2	Barometrische Atmosphären	19
2.1.3	Eine andere Erklärung für die barometrische Atmosphäre	21
2.1.4	Diffusion und Eddy-Diffusion	22
2.1.5	Heizung von Atmosphären	23
2.1.6	Der Treibhauseffekt	26
2.1.7	Atmosphärische Zirkulation	31
2.1.8	Exosphären	35
2.2	Atmosphärische Verlustprozesse	39
2.2.1	Jeans Escape	39
2.2.2	Andere Verlustmechanismen	40
3	Die solare Atmosphäre und Korona	43
3.1	Aufbau der Sonnenatmosphäre	43
3.1.1	Photosphäre	44
3.1.2	Chromosphäre und Übergangsschicht	51
3.2	Die Korona	54
3.2.1	Ionisationszustand der Korona	55
3.2.2	Messungen koronaler Eigenschaften	56
3.2.3	Ionisation und Rekombination	59
3.3	Das solare Magnetfeld und der solare Dynamo	72
3.3.1	Potentialfelder	77
3.3.2	Kräftefreie Felder	79
3.3.3	Ein einfaches Dynamo-Modell	83
3.3.4	Moderne Dynamo Theorie	92
3.3.5	Der solare Dynamo	94
3.4	Koronale Expansion und Entstehung des Sonnenwindes	95
3.4.1	Geschichtliches	95
3.5	Der Sonnenwind	97

3.5.1	Heizung der Korona	97
3.5.2	Ursprung des Sonnenwindes	99
3.5.3	Parkermodell	100
3.5.4	Beobachtungen	106
3.5.5	Ausblick auf Sternwinde	106
4	Planetare Ionosphären	109
4.1	Radiowellen in der Ionosphäre	109
4.2	Entstehung von Ionosphären	115
4.2.1	Heizung II und Zirkulation II	117
4.2.2	Elektrische Leitfähigkeit	118
4.3	Ströme in der Ionosphäre	122
4.3.1	Der äquatoriale Elektrojet	125
4.4	Aurorae	125
5	Heliosphäre und Sonnenwind	127
5.1	Die lokale interstellare Umgebung	127
5.2	Struktur der Heliosphäre	130
5.2.1	Rasensprenger, Archimedes und Parker	133
5.2.2	Schneller und langsamer Sonnenwind	144
5.2.3	Die dritte Dimension, Ulysses-Resultate	145
5.2.4	Corotating Interaction Regions	145
5.3	Wechselwirkung des Sonnenwindes mit Hindernissen	151
5.3.1	Stoßfreie Plasmen?	151
5.3.2	MHD-Gleichungen	152
5.3.3	Ausbreitung von Störungen	154
5.4	Entstehung von Schocks	155
5.4.1	Dissipation und Dispersion	157
5.4.2	Dicke der Übergangsschicht oder Stabilisierung von Schocks	158
5.5	Interplanetare Stoßfronten (Schocks)	160
5.5.1	Rankine-Hugoniot Beziehungen	161
5.5.2	Die Zoologie von Schocks	163
5.5.3	Beschleunigung von Teilchen an Stoßfronten	164
5.5.4	Schock-Drift Beschleunigung	176
5.5.5	Transportgleichung	176
6	Planetare Magnetosphären	181
6.1	Entstehung von Magnetosphären	181
6.2	Struktur von Magnetosphären	181
6.3	Magnetosphärische Ströme	181
6.4	Rekonnektion	182
6.5	Atmosphärische Verlustraten	182

A	Kinetische Physik	183
A.1	Die Verteilungsfunktion	183
A.2	Die Boltzmann-Gleichung	183
A.3	Das Stoßintegral	185
A.4	Momente der Boltzmann-Gleichung	187
A.5	Die Vlasov-Gleichung	192
A.6	Kinetische Behandlung von Wellen in Plasmen	192
A.6.1	Landaudämpfung	192
B	Grundlagen der Magnetohydrodynamik	193
B.1	Herleitung der Grundgleichungen	193
B.2	Vektoroperatoren in verschiedenen Koordinatensystemen	197
B.2.1	Kartesische Koordinaten: (x, y, z)	197
B.2.2	Zylindrische Koordinaten: (ρ, θ, z)	197
B.2.3	Sphärische Koordinaten (Kugelkoordinaten): (r, θ, ϕ)	197

Kapitel 1

Einführung

Die Extraterrestrische Physik behandelt die Physik des Extraterrestrischen, des Außerirdischen. Wo das Außerirdische beginnt und wo das Irdische endet ist nur unscharf definiert - irgendwo in der Atmosphäre. Wir beginnen deshalb diese Vorlesung mit einem Kapitel über die terrestrische Atmosphäre (Kapitel 2) und wenden dieses Wissen exemplarisch auf Atmosphären anderer Planeten an. Die größte Atmosphäre im Sonnensystem, die der Sonne, behandeln wir in Kapitel 3, wie auch ihre Heizung auf sehr hohe Temperaturen im Bereich von MK und ihre Ausbreitung in den Weltraum oder interplanetaren Raum. Diese heiße Korona ist wesentlich für die Entstehung von Ionosphären verantwortlich, die wir in Kapitel 4 behandeln. In ihr können Stromsysteme, wie sie in Magnetosphären auftauchen, geschlossen werden. Die Wechselwirkung des Sonnenwindes mit dem Magnetfeld eines Planeten bildet Magnetosphären, wie in Kapitel 6 beschrieben. Wo der Sonnenwind mit dem interstellaren Medium, in welches wir eingebettet sind, zusammenstößt, bildet sich analog zu einer Magnetosphäre die sog. Heliosphäre, das Reich der Sonne (Kapitel 5).

1.1 Polarlichter – eine spektakuläre Erscheinung am polaren Nachthimmel

Polarlichter sind eine der spektakulärsten Erscheinungen am Nachthimmel und haben Menschen seit jeher fasziniert. Wie kommen diese Leuchterscheinungen zustande? Dies zu verstehen ist in diesem Stadium des Physikstudiums nun gut möglich, wenn auch nicht alle Details der Entstehung von Polarlichtern geklärt sind. Berichte über diese Erscheinungen sind auch schon von Inuit (Eskimos) oder auch den Römern überliefert - von ihnen kommt der uns geläufige Name *Aurora*, lateinisch für Morgenröte.

Der Name Nordlichter beschreibt Aurorae nicht korrekt. Wohl wurden sie von “uns” zuerst in nördlichen Polarregionen gesehen (*Aurora borealis*), sie werden auch am Südpol beobachtet (*Aurora australis*), was darauf schließen lässt, dass sie mit den Polregionen im Zusammenhang stehen. Genaue Beobachtungen zeigen, dass sie mit den magnetischen Polen zusammenhängen.



Abbildung 1.1: Polarlichter aufgenommen von verschiedenen Standorten: Links von Bear Lake, Alaska; Mitte vom Space Shuttle (STS-039); rechts vom Satelliten IMAGE. Quellen: J. Strang, USAF; Image Science & Analysis Laboratory, NASA, JSC; Image Mission NASA, GSFC.

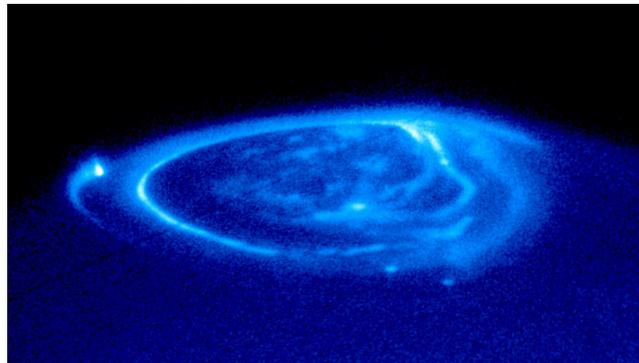


Abbildung 1.2: Die stärksten Polarlichter im Sonnensystem werden am Jupiter gesehen. Das besonders starke Magnetfeld und die großen Populationen von energiereichen Teilchen führen zu einer besonders starken Ausprägung in den Jupiterpolregionen. Quelle: Space Telescope Institute, NASA

Aurorae treten in zwei Klassen von Formen auf, als diffuse Erscheinung oder diskret in Form von Bändern, Bögen, Strahlen, etc. Sie können ihre Form und Farbe innerhalb von Sekunden ändern. Sie treten nur in Höhen über hundert Kilometern auf und sind vertikal entlang dem lokalen Magnetfeld orientiert. Horizontal können sie sich in Ost-West Richtung über hunderte von Kilometern erstrecken, während sie in Nord-Süd Richtung auf wenige hundert Meter bis zu ca. einem Kilometer beschränkt sind.

Die Farben der Leuchterscheinungen sind grün-gelb, rot, dunkelrot und blau-violett. Interessanterweise sind die Farben auf einzelne Linien beschränkt, was den Ursprung auf Übergänge in Atomen, Molekülen oder (Molekül-)Ionen festlegt. Die Intensität kann bis zu hunderte oder gar tausend kR (kilo-Rayleigh) betragen. Ein Rayleigh ist die Einheit für 10^6 Photonen pro cm^2 . Damit entstehen pro cm^3 ca. 10^7 Photonen, was eine Energieumwandlung in Licht von bis zu $\sim 10^7$ eV/ cm^3 s bzw. $\sim 10^{-8}$ W/ m^3 entspricht. Wir werden im Laufe dieser Vorlesung lernen, dass dies etwa die Größenordnung der Heizung durch solare UV-Strahlung in dieser Höhe entspricht.

Die Atome, Moleküle und Molekülionen werden durch energiereiche Elek-

1.1. POLARLICHTER – EINE SPEKTAKULÄRE ERSCHEINUNG AM POLAREN NACHTHIMMEL

tronen und, in einem geringeren Maße Protonen, zu Leuchten angeregt. Die dabei auftretenden Prozesse sind kompliziert, wir werden sie im Kapitel 4 besprechen. Ihre Variabilität hängt stark von der Anpassung der Magnetosphäre (Kapitel 6) an den variablen Sonnenwind (Kapitel 3) ab. Weitere Zutaten zum Verständnis sind die Struktur der Atmosphäre (Kapitel 2) und die Beschleunigung der erzeugenden Elektronen und Protonen in der Magnetosphäre durch Streuprozesse und andere kinetische Prozesse (Kapitel A).

Zugrunde liegen diesen Prozessen aber auch die Elektrodynamik, Atom- und Molekülphysik, Plasmaphysik, statistische Physik, Thermo-, Aero- und Magnetohydrodynamik. Diese faszinierende Leuchterscheinung am Nachthimmel mag also den Einstieg in diese Vorlesung motivieren.

Ich danke allen Kolleginnen und Kollegen der Extraterrestrischen Physik für Kritik an diesem Skriptum und insbesondere Christian Drews und Viktor Hrkac für die detaillierte Durchsicht und Fehlerkorrektur.

Kapitel 2

Planetare Atmosphären

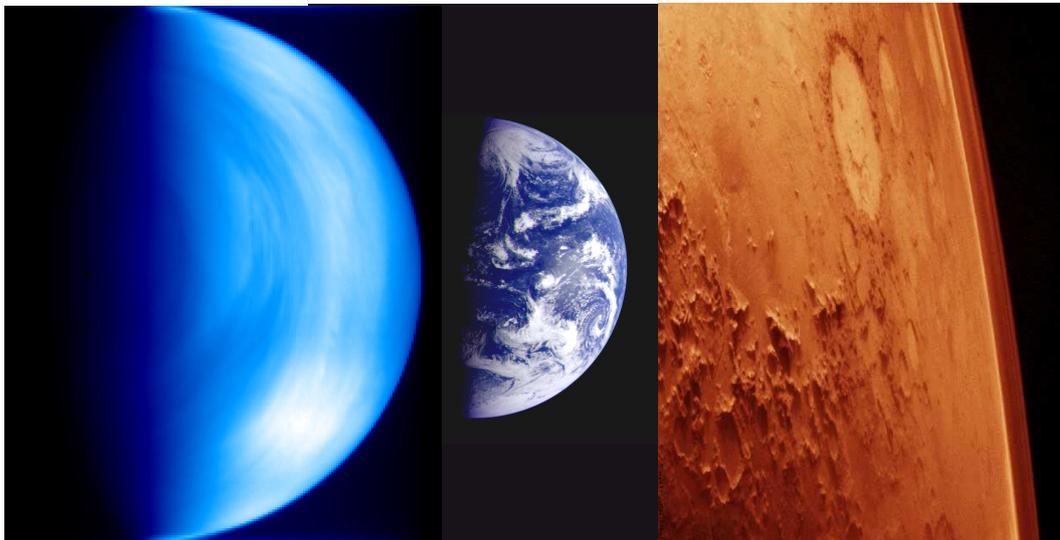


Abbildung 2.1: Aufnahmen von Venus, Erde und Mars zeigen die verschiedenen Atmosphären der drei Planeten. Siehe auch Tabelle 2.1.

Die Planeten des Sonnensystems weisen eine zunächst erstaunliche Vielfalt an verschiedenen Atmosphären auf. Während Merkur so gut wie keine besitzt, ist die von Venus sehr dicht und heiß, die der Erde “gerade richtig” für irdisches Leben, die des Mars sehr dünn und die der Riesenplaneten völlig anders strukturiert, als wir es von den terrestrischen Planeten kennen. Ein Einblick in die Variabilität liefert das Isotopenverhältnis $^{40}\text{Ar}/^{36}\text{Ar}$ in den Atmosphären von Venus, Erde und Mars.

Die Bedeutung dieser verschiedenen Werte mag jetzt noch nicht offensichtlich sein, kann aber erahnt werden, wenn man annimmt, dass alle Planeten mit dem Sonnensystem aus dem gleichen primordialen Material entstanden sind und dass Ar als ein schweres Edelgas an alle diese drei Planeten gravitativ gut gebunden und chemisch inert ist. Wie kommen die Unterschiede zustande? Um dies zu verstehen, müssen wir zunächst den Aufbau von Atmosphären verstehen, und später die Quell- und Senkterme untersuchen. Eine definitive

	Venus	Erde	Mars
$^{40}\text{Ar}/^{36}\text{Ar}$	1.17	314	3210
D/H	1.6×10^{-2}	1.5×10^{-4}	9×10^{-4}
Gasmenge	~ 100	$\doteq 1$	$\sim 10^{-2}$

Tabelle 2.1: Die $^{40}\text{Ar}/^{36}\text{Ar}$ und D/H-Verhältnisse in den Atmosphären von Venus, Erde und Mars sind sehr verschieden. Die Gasmengen unterscheiden sich jeweils um etwa zwei Größenordnungen. (Quellen: ESA und NASA)

Antwort werden wir hier nicht finden, sie geht über den Stoff dieser Vorlesung deutlich hinaus. Ein Prozess, der eine wichtige Rolle in der Atmosphärenphysik spielt, wird mit dem D/H-Verhältnis verdeutlicht. Das primordiale (BigBang) D/H-Verhältnis liegt bei ca. 1.5×10^{-5} , während das von Kometen etwa 20 Mal höher liegt (3×10^{-4})¹. Bei Venus und Mars war der atmosphärische Verlust (Jeans Verlust) größer als bei der Erde (massiver) und sie haben deshalb mehr H verloren als D, womit das Verhältnis D/H bei den beiden Planeten angereichert worden ist.

Wir werden in diesem Kapitel die Struktur und Verlustmechanismen von planetaren Atmosphären untersuchen.

2.1 Struktur von Atmosphären

Von allen Atmosphären ist natürlich die der Erde am besten erforscht und am genauesten messbar. Wir werden deshalb mit der Diskussion der Struktur der irdischen Atmosphäre beginnen und anschließend beispielhaft andere Atmosphären behandeln.

Die Atmosphäre ist ein kompliziertes physikalisches System in welchem verschiedene Prozesse eine Rolle spielen. Sie wird sowohl von der Sonne als auch von der Erde geheizt, sie ist teils konvektiv und teils diffusiv, in geringen Höhen ist der ionisierte Anteil für fast alle Anwendungen vernachlässigbar, in großen Höhen ist sie vollständig ionisiert. Abb. 2.2 gibt einen Überblick über die verschiedenen Teilaspekte der irdischen Atmosphäre.

Temperaturprofil

Das Temperaturprofil der irdischen Atmosphäre kann durch eine Kombination von Temperaturgradienten und Heizprozessen relativ einfach verstanden werden. Wir untersuchen zuerst, wie sich ein Luftpaket um eine kleine Auslenkung in der Höhe bewegt. Wir nehmen an, dass es sich immer im Druckgleichgewicht mit der Umgebung befindet, d. h., dass sich kleine Druckunterschiede sehr schnell angleichen (z. B. durch Schallwellen). Dann gilt der erste Hauptsatz der Thermodynamik in der Form

$$\delta Q = dU + p dV. \quad (2.1)$$

¹Das irdische Wasser kann also nicht hauptsächlich von Kometen stammen.

		Interplanetarer (heliosphärischer) Raum			
	10 ⁵				
geostationäre Satelliten	10 ⁴		Geokorona		
				Effusosphäre	Plasmapause
		Thermosphäre		Exosphäre	Plasmasphäre
Space Shuttle, ISS	10 ³		Heterosphäre		
				Exobase	F-Region
Spaceship One	100	Mesopause		Diffusosphäre	E-Region
Raketen		Mesosphäre	Homopause	Turbopause	D-Region
Ballone		Stratopause	Homosphäre	Turbosphäre	
Flugzeuge		Stratosphäre			
	10	Tropopause			
		Troposphäre			
	0				
		Temperatur	Zusammensetzung	vertikaler Transport	gravitative Bindung
					thermisches Plasma

Abbildung 2.2: Die Struktur der Atmosphäre kann über verschiedene Kenngrößen verstanden werden. Nach *Prölss* (2004) mit Ergänzungen.

Die innere Energie $dU = N_m C_V dT$ und das ideale Gasgesetz $pV = N_m RT$, wo N_m die Molmenge bedeute, sind aus der Wärmelehre bekannt. Mit $d(pV) = pdV + Vdp$ können wir Glg. 2.1 umschreiben

$$\delta Q = N_m C_V dT + d(pV) - Vdp,$$

was mit dem idealen Gasgesetz und $C_P = C_V + R$

$$\delta Q = N_m C_P dT - Vdp$$

gibt. Nun setzen wir noch das Grundgesetz der Hydrostatik ein, $dp = -\rho g dz$ und erhalten

$$\delta Q = N_m C_P dT + V \rho g dz. \quad (2.2)$$

Die Bewegung des Luftpaketes sei schnell und es habe keine Zeit, mit der Umgebung Wärme auszutauschen, es bewegt sich also adiabatisch. Dann ist

$\delta Q = 0$ und wir erhalten

$$\begin{aligned} N_m C_p dT &= -V \rho g dz, \\ \frac{m}{V} c_p dT &= -\rho g dz, \\ \frac{dT}{dz} &= -\frac{g}{c_p}. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Damit haben wir den Temperaturgradienten einer adiabatischen Atmosphäre hergeleitet. Diese Größe wird englisch “lapse rate” genannt, was manchmal für Verwirrungen sorgt, weil die Bedeutung dieses Namens uns nicht klar ist.

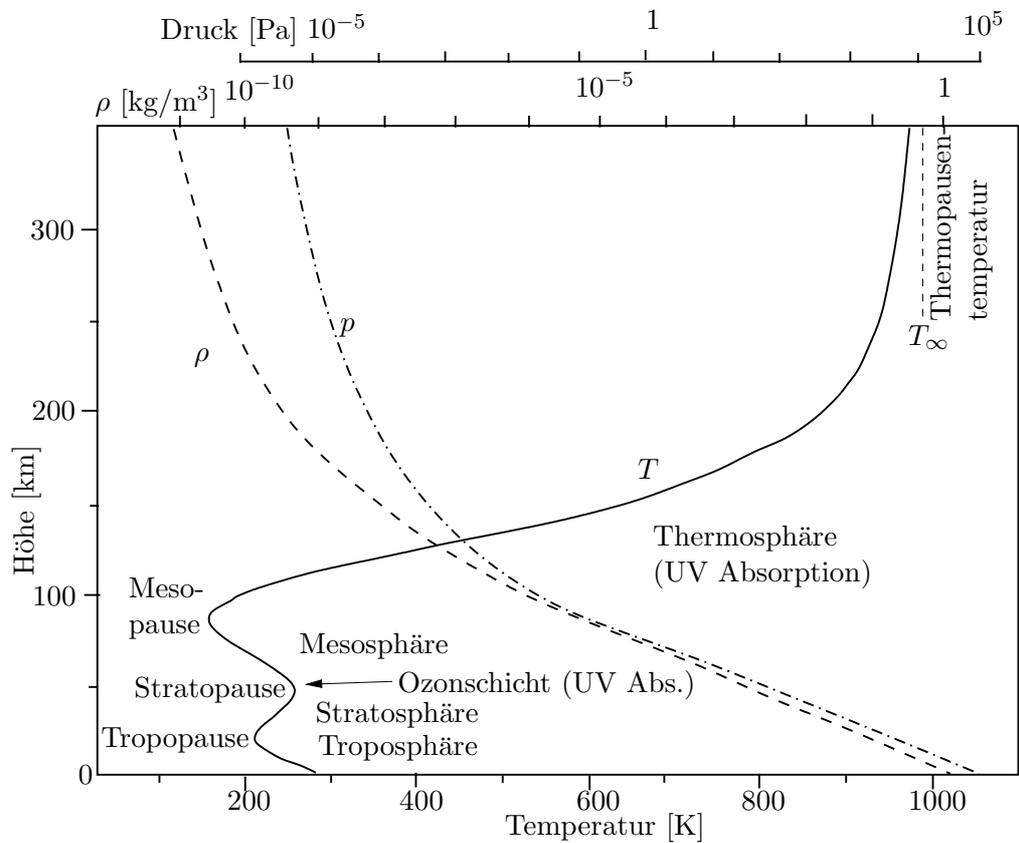


Abbildung 2.3: Atmosphärische Profile von Temperatur (T , durchgezogen), Druck (p , Strichpunkt) und Massendichte (ρ , gestrichelt). Nach *Prölls* (2004) mit Anpassungen.

Die durch die Sonne geheizte warme Erdoberfläche erwärmt die Luft in Bodennähe. Die Gleichgewichtstemperatur liegt über der in diesem heliozentrischen Abstand erwarteten, eine Folge des Treibhauseffektes (siehe Abschnitt 2.1.6). Die Temperatur nimmt mit steigender Höhe ab, mit einem Gradienten von $-g/c_p$. Setzt man die Zahlen hierfür ein², erhält man einen Temperaturgradienten von ca. 10 K pro km, was höher als die beobachteten ca. 6.5 K pro km ist.

²Die spezifische Wärmekapazität von Luft beträgt ca. 1 kJ/(kg K).

Das kommt daher, dass wir hier nur trockene Luft berücksichtigt haben. Mit sinkender Temperatur steigt auch die relative Luftfeuchtigkeit und der Wasserdampf wird bei Erreichen des Taupunktes kondensieren. Dabei wird die latente Wärme des Wasserdampfes an die Luft abgegeben. Wegen des Wassergehaltes von etlichen Gramm pro Kilogramm Luft muss man für gesättigte Luft einen Temperaturgradienten von ca. 5 K/km verwenden. Für normale Anwendungen wird ein mittlerer Temperaturgradient von ca. 6.5 K/km verwendet.

Infobox Ozon

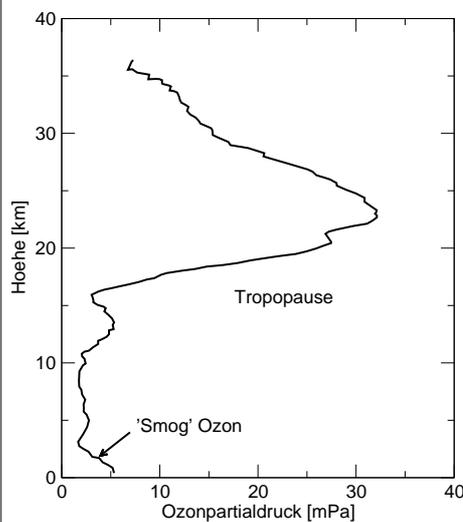


Abbildung 2.4: Höhenabhängigkeit des Partialdruckes von Ozon in der Erdatmosphäre. Quelle: NOAA

Ozon kommt fast überall in der Atmosphäre vor, spielt aber dort unterschiedliche Rollen. Am Boden entsteht es in erster Linie als Folge von Verbrennungsprozessen insbesondere in Verbrennungsmotoren. Dabei entsteht Stickoxid (NO), welches rasch mit Ozon reagiert, $\text{NO} + \text{O}_3 \rightarrow \text{NO}_2 + \text{O}_2$. In den 'Abluftfahnen' von Städten wird das NO_2 durch Sonnenlicht wieder aufgespalten in NO und Ozon. Hier wird aber die Reaktion $\text{NO} + \text{O}_3 \rightarrow \text{NO}_2 + \text{O}_2$ durch Reaktionen mit Peroxyradikalen, die von Wäldern und Feldern stammen, konkurriert. Darum entsteht netto mehr Ozon als zerstört wird. Hohe Ozonkonzentrationen sind wegen der großen Reaktivität von Ozon schädlich.

In der Stratosphäre absorbiert Ozon das UVB (280 nm – 315 nm, bzw. 3,94 – 4,43 eV), welches zu Hautkrebs oder auch dem grauen Star führen kann. Außerdem führt eine geringere Absorption von UVB in der Stratosphäre zu einer Erhöhung des troposphärischen Ozons. Stratosphärisches Ozon wird durch die erhöhte Konzentration von Fluorchlorkohlenwasserstoffen gefährdet. Die FCKWs werden nach $\text{CFCl}_3 + h\nu \rightarrow \text{CFCl}_2 + \text{Cl}$ aufgespalten. Das freie Cl-Atom wirkt nun als Katalisator für die Reaktionen $\text{Cl} + \text{O}_3 \rightarrow \text{ClO} + \text{O}_2$ und anschließend $\text{ClO} + \text{O}_3 \rightarrow \text{Cl} + 2 \text{O}_2$. Auf diese Weise kann ein Chloratom im Schnitt ca. 100.000 Ozonmoleküle zerstören bevor es zu HCl oder Chlornitrat (ClONO_2) reagiert. 1987 wurden FCKWs im Montreal-Protokoll verboten. Deren Konzentration in der Atmosphäre erreichte 1994 ein Maximum und nimmt seither langsam ab. Die Wirkung des Montreal-Protokolls kann nachgewiesen werden (Mäder et al., 2010).

Die Temperatur folgt bis in eine Höhe von ca. 10 km dem soeben erläuterten Temperaturgradienten. Diese Schicht wird Troposphäre genannt. Die Temperatur verharrt an der Tropopause auf einem breiten Minimum bei ca. 220K (Flugzeuge fliegen durch kalte Luft - Kondensstreifen!) und beginnt wieder an-

zusteigen. Dieser Anstieg in der Stratosphäre ist auf Absorption von langwelliger solarer UV-Strahlung ($\lambda > 242 \text{ nm}$) durch die Ozonschicht zurückzuführen (siehe Infobox). Die obere Grenze der Stratosphäre heißt Stratopause. Hier werden ähnliche Temperaturen wie auf der Erdoberfläche erreicht. Der weitere Dichteabfall und die veränderte Atmosphärenchemie in größeren Höhen reduziert den Energieeintrag und die Atmosphäre kühlt in der Mesosphäre weiter ab und erreicht an der Mesopause ein weiteres Temperaturminimum. In diesem Bereich werden in polaren Regionen nacht-leuchtende Wolken (nocti-lucent clouds) beobachtet. Diese kommen durch Kondensation und Kristallisation in diesen großen Höhen zustande. Sie leuchten nicht selber, sondern reflektieren das in ihrer Höhe noch vorhandene Sonnenlicht. Oberhalb der Mesopause nimmt die Temperatur dramatisch zu. Kurzwelliges solares UV wird nun durch Photodissoziation, -ionisation und Kombinationen davon von Sauerstoff- und Stickstoffmolekülen absorbiert. Die deponierte Energie kann nur noch sehr ineffizient abgegeben werden, weil die Dichte so gering ist, dass Stöße nur noch selten sind. Über ca. 200 km beginnt die Temperatur sich asymptotisch einer Grenztemperatur, der Thermopausentemperatur oder Exosphärentemperatur, zu nähern. Diese beträgt typisch ca. 1000K, ist aber sehr stark von der Sonnenaktivität abhängig und variiert zwischen 600K und 2500K.

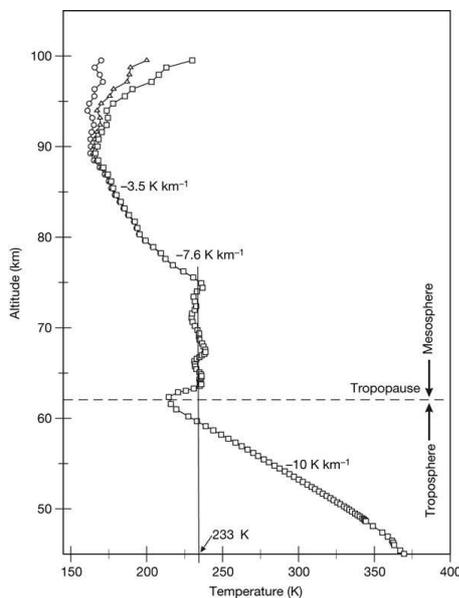


Abbildung 2.5: Temperaturprofile für die Atmosphäre der Venus. Von Pätzold *et al.* (2007).

Die fehlende Ozonschicht äußert sich mit einem Fehlen der Stratosphäre. Die kleinskaligen Strukturen in der Mesosphäre sind signifikant und nicht auf Messfehler zurückzuführen. Oberhalb der Mesosphäre verringert sich der Temperaturgradient mit zunehmender Höhe.

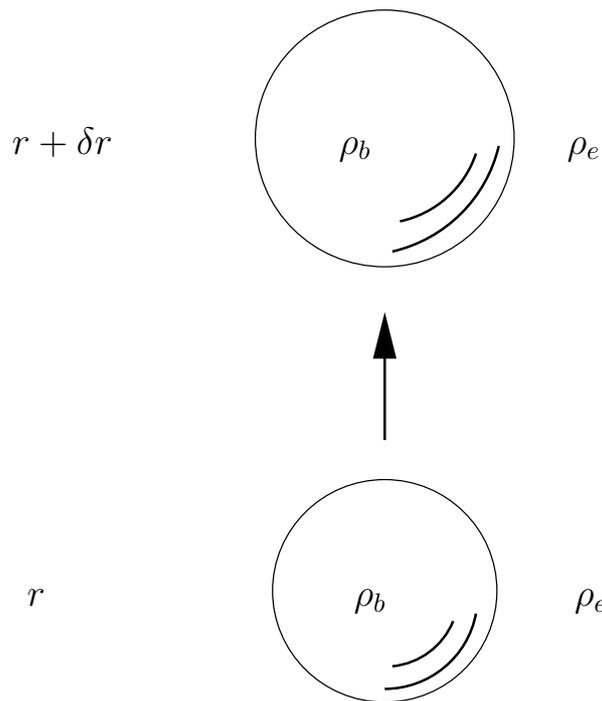
Die viel höheren Temperaturen auf der Venus als auf der Erde sind haupt-

Der Einfluss der Ozonschicht auf das Temperaturprofil der irdischen Atmosphäre kann sehr schön gesehen werden, wenn man es mit dem Profil der Venus vergleicht. Abb. 2.5 zeigt drei Temperaturprofile aufgenommen mit dem Venus-Express Radiosounding Experiment (Pätzold *et al.*, 2007). Der Temperaturgradient beträgt konstant etwa 10 K/km und wird nicht durch eine Heizung an der Tropopause unterbrochen. Der Temperaturgradient von ca. 10 K/km ist kein Widerspruch zur obigen Herleitung. Venus ist trocken und zwar leichter als die Erde, dafür aber auch etwas kleiner. Außerdem ist ihre Atmosphäre anders zusammengesetzt. Zusammen ergeben diese Faktoren einen Temperaturgradienten, wie wir ihn auf der Erde erwarten. Die spezifische Wärmekapazität der Venusatmosphäre ist etwa 850 J/kgK. Die

sächlich auf den Treibhauseffekt zurückzuführen, den wir in Abschnitt 2.1.6 behandeln werden.

2.1.1 Kräfte auf Luftmassen

Konvektion



Wir betrachten eine Luftblase, welche sich um δr nach oben durch die Atmosphäre bewegen mag, wie in Abb. 2.6 skizziert. Für kurze Zeiten ist kein Wärmeaustausch mit der Umgebung zu erwarten und sie expandiert adiabatisch. Diese Expansion führt zu einer Reduktion der Dichte. Auch die Umgebung ist bei $r + \delta r$ weniger dicht, hatte aber im Gegensatz zur Blase ausreichend Zeit, durch Wärmeaustausch ins Gleichgewicht zu kommen, Blase und Umgebung müssen daher nicht zwingend dieselbe Dichte aufweisen. Ist die Blase dichter als die Umgebung, so sinkt sie wieder ab, die Situation ist stabil. Ist die Blase weniger dicht als die Umgebung, so steigt sie weiter (adiabatisch) auf, in der Regel beschleunigt, und die Situation ist instabil. Bei Höhe $r + \delta r$ gilt

$$\begin{aligned}\rho_b(r + \delta r) &= \rho_b(r) + \delta r \frac{d\rho_b}{dr}, \\ \rho_e(r + \delta r) &= \rho_e(r) + \delta r \frac{d\rho_e}{dr},\end{aligned}$$

wenigstens zu niedrigster Ordnung. Nehmen wir an, dass sowohl Blase als auch die Umgebung ursprünglich im Gleichgewicht waren, so lautet die Differenz

$$\rho_b(r + \delta r) - \rho_e(r + \delta r) = \delta r \left(\frac{d\rho_b}{dr} - \frac{d\rho_e}{dr} \right). \quad (2.4)$$

In einer stabilen Situation muss die Änderung positiv sein und wir erhalten das Schwarzschildkriterium für Stabilität

$$\left(\frac{d\rho}{dr} \right)_e < \left(\frac{d\rho}{dr} \right)_{\text{adiab}}, \quad (2.5)$$

weil wir angenommen haben, dass die Blase adiabatisch expandiert. Diese Bedingung kann auch über die Temperatur ausgedrückt werden. Mit den gewöhnlichen thermodynamischen Gleichungen erhalten wir

$$\left(\frac{dT}{dr}\right)_e < \left(\frac{dT}{dr}\right)_{\text{adiab}}, \quad (2.6)$$

Übung 2.1 Zeigen Sie dies und beachten Sie das Vorzeichen der Änderungen!

Ist der Temperaturgradient kleiner als der adiabatische Gradient, bleibt die Schichtung stabil. Wird die Bedingung verletzt, beginnen Blasen aufzusteigen und Konvektion setzt ein.

Druckausgleich

Ein Druckgradient führt zu einer (beschleunigten) Bewegung von Luft. Aus Einheitsüberlegungen muss die Kraft pro Volumen gerade gleich dem Druckgradienten sein.

$$F_p^* = -\frac{\partial p}{\partial l}, \quad (2.7)$$

wo der Stern "pro Volumen" andeuten soll.

Reibung

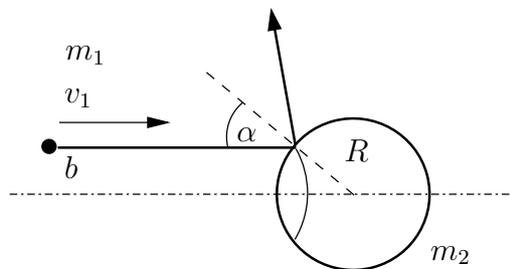


Abbildung 2.7: Geometrie für einen Stoß zwischen einem Partikel mit Radius $R = r_1 + r_2$ und einem Massenpunkt m_1 .

Wir wollen die Reibung zwischen zwei Gaskomponenten 1 und 2 untersuchen, die mit unterschiedlichen Geschwindigkeiten u_1 und u_2 durcheinander strömen. Reibung ist auf Stöße zwischen den das Gas konstituierenden Partikeln zurückzuführen. Die Stoßgeometrie ist in Abb. 2.7 gezeigt. Zwei Partikel mit Massen m_1 und m_2 und Radien r_1 und r_2 sollen mit einem Stoßparameter b stoßen. Dabei interessiert uns nur die Geschwindigkeitskomponente von m_1 nach dem Stoß in Vorwärtsrichtung,

also um wieviel m_1 abgebremst worden ist. Im Bezugssystem, in welchem m_2 still steht, definieren wir $v_1 \doteq u_1 - u_2$. Nach einem vollständig elastischen, zentralen Stoß wird v_1 zu v'_1 ,

$$v'_1 = v_1 \cdot \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}$$

und die Impulsänderung

$$\Delta p_1 = m_1(v'_1 - v_1) = \frac{2m_1m_2}{m_1 + m_2}(u_2 - u_1),$$

wie man durch Einsetzen leicht findet. u_1 und u_2 sind die systematischen Geschwindigkeiten der Gaskomponenten 1 und 2. Im Falle eines nicht-zentralen Stoßes, ist die Impulsänderung mit $\cos \alpha$ zu korrigieren. Weil hier nur die Vorwärtskomponente von Interesse ist, muss noch ein weiterer Faktor $\cos \alpha$ hinzumultipliziert werden. Damit gilt also für einen Stoß mit Stoßparameter b

$$\Delta p(b) = \Delta p(b=0) \cos^2 \alpha.$$

Die durchschnittliche Impulsänderung erhalten wir durch Integration über alle Stoßparameter.

$$\langle \Delta p \rangle = \Delta p(b=0) \int_0^R \frac{R^2 - b^2}{R^2} \frac{2\pi b}{\pi R^2} db = \frac{1}{2} \Delta p(b=0) \quad (2.8)$$

wo wir $b = R \sin \alpha$ und folglich $\cos^2 \alpha = (R^2 - b^2)/R^2$ verwendet haben. Die Reibungskraft, die auf ein Partikel im Gas 1 wirkt, muss nun gleich der Impulsänderung pro Zeit sein, also die Impulsänderung mal die Stoßfrequenz ν_{12} ,

$$F_{R1} = \langle \Delta p \rangle \nu_{12}.$$

Diese grobe Abschätzung vernachlässigt z. B. die Geschwindigkeitsverteilungsfunktion der Partikel - eine genaue Rechnung ergibt einen zusätzlichen Faktor 4/3. Damit lautet der Ausdruck für die Reibungskraft pro Volumen auf Gas 1

$$F_{R1}^* = \frac{4}{3} n_1 \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \nu_{12} (u_2 - u_1) \quad (2.9)$$

und ist proportional zum Geschwindigkeitsunterschied zwischen Gas 1 und Gas 2. Sind die beiden Gase relativ zu einander in Ruhe, so üben sie auch keine Kraft auf einander aus und verhalten sich, als ob es das jeweils andere Gas gar nicht geben würde.

Die Stoßfrequenz ν_{12} kann man als inverse Zeit zwischen zwei typischen Stößen interpretieren. Typischerweise stößt ein Teilchen nach einer mittleren freien Weglänge, $\lambda = 1/(n\sigma)$, wo n die Teilchendichte und σ der Streuquerschnitt ist. Damit ist $\nu_{12} = v_{\text{rel}}/\lambda = v_{\text{rel}}\sigma n$. Die Relativgeschwindigkeit v_{rel} hängt von den Massen der Teilchen im Gas 1 und 2 ab sowie von den Temperaturen T_1 und T_2 . Der Streuquerschnitt ist $\sigma = \pi(r_1 + r_2)^2$ und damit erhält man nach etlichen Näherungen (Siehe *Prölss*, 2004, für eine Herleitung.)

$$\nu_{12} = \sqrt{\frac{8k}{\pi} \left(\frac{T_1}{m_1} + \frac{T_2}{m_2} \right)} \cdot \sigma \cdot n_2. \quad (2.10)$$

Für spätere Zwecke führen wir hier noch die Stoßfrequenz für den Impulstransfer ein,

$$\nu_{12}^* \doteq \frac{4}{3} \frac{m_2}{m_1 + m_2} \nu_{12}. \quad (2.11)$$

2.1.2 Barometrische Atmosphären

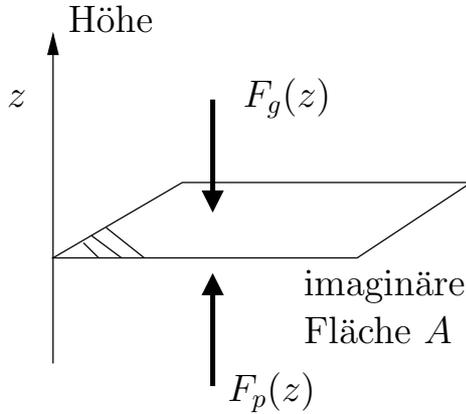


Abbildung 2.8: Zur Herleitung der hydro- oder aerostatischen Gleichung.

gelten. Nach z abgeleitet erhalten wir die bekannte Form der hydrostatischen, oder, weil wir es jetzt mit "Luft" zu tun haben, der aerostatischen Gleichung, die schon auf Laplace zurückgeht,

$$\frac{dp}{dz} = -\rho(z)g(z). \quad (2.14)$$

Mit bekanntem $g(z)$ und einer Beziehung zwischen p und ρ lässt sich also die Höhenabhängigkeit der beiden Größen berechnen.

Für ein ideales Gas gilt

$$\rho = \bar{m}n = \bar{m} \frac{p}{kT},$$

wo \bar{m} die mittlere Masse der Teilchen ist. In die aerostatische Gleichung eingesetzt ergibt dies

$$\frac{dp}{dz} = -\frac{\bar{m}g}{kT}p = -\frac{p}{H},$$

wo

$$H(z) \doteq \frac{kT(z)}{\bar{m}(z)g(z)} \quad (2.15)$$

die sog. Druckskalenhöhe der Atmosphäre ist. Damit gilt auch

$$\int_{p(h_0)}^{p(h)} \frac{dp}{p} = \ln \frac{p(h)}{p(h_0)} = -\int_{h_0}^h \frac{dz}{H(z)},$$

wo h_0 eine Referenzhöhe und h eine beliebige Höhe in der Atmosphäre ist. Somit haben wir auch bereits die Lösung

$$p(h) = p(h_0) \exp \left\{ -\int_{h_0}^h \frac{dz}{H(z)} \right\}, \quad (2.16)$$

die sog. barometrische Höhenformel für den vertikalen Druck in einer Atmosphäre.

Ganz analog wird die barometrische Höhenformel für die Teilchendichte $n(h)$ hergeleitet.

Die grundlegende Gleichung für die Atmosphärenphysik dürfte noch aus der Hydrostatik bekannt sein. An der imaginären Fläche A in Abb. 2.8 muss für ein statisches Gleichgewicht $F_g(z) = F_p(z) = Ap(z)$ gelten. Die Gewichtskraft auf die Fläche A ist gegeben durch

$$F_g(z) = A \int_z^\infty \rho(z')g(z')dz', \quad (2.12)$$

wo ρ die Massendichte und g die (Erd-) Beschleunigung bedeuten. Im statischen Gleichgewicht muss daher

$$p(z) = \int_z^\infty \rho(z')g(z')dz' \quad (2.13)$$

Übung 2.2 *Tun Sie dies!*

Die Lösung lautet

$$n(h) = n(h_0) \frac{T(h_0)}{T(h)} \exp \left\{ - \int_{h_0}^h \frac{dz}{H(z)} \right\} = n(h_0) \exp \left\{ - \int_{h_0}^h \frac{dz}{H_n(z)} \right\}, \quad (2.17)$$

wo $H_n(z)$ die Dichtenskalenhöhe ist,

$$H_n \doteq \left\{ \frac{dn / dz}{n} \right\}^{-1}. \quad (2.18)$$

Übung 2.3 *Leiten sie den Ausdruck für die Teilchenzahlskalenhöhe her.*

Der Ausdruck für die Skalenhöhe der Teilchenzahldichte lautet

$$\frac{1}{H_n} = \left(\frac{1}{H} + \frac{1}{T} \frac{dT}{dh} \right), \quad (2.19)$$

wie z. B. aus der Herleitung von Gl. 2.17 klar wird.

2.1.3 Eine andere Erklärung für die barometrische Atmosphäre

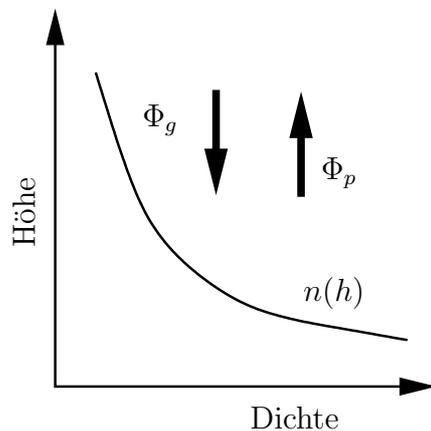


Abbildung 2.9: Diffusiver Transport wird durch Gravitation und Druckgradient ins Gleichgewicht gebracht. Im Gleichgewicht ist die Atmosphäre barometrisch geschichtet.

Die Struktur der barometrischen Atmosphäre kann auch aus einer Gleichgewichtsüberlegung hergeleitet werden. In einer Atmosphäre ohne Konvektion wirken auf ein Gas zwei Kräfte. Die Gravitation ist bestrebt, das Gas nach unten zu ziehen, während der dadurch entstehende Druckgradient das Gas nach oben drückt. Die Gravitation führt zu einem Fluss Φ_g nach unten, während der aufgebaute Druckgradient einen Fluss Φ_p nach oben zur Folge hat. Im Gleichgewicht sind beide Flüsse gleich. Weil die beiden Flüsse diffusiver Natur sind, ist die Atmosphäre dann im diffusiven Gleichgewicht.

Die durch das Zusammenspiel von Gravitation und Reibung hervorgerufene Geschwindigkeit nach unten sei u_g . Dann zeigt die Reibungskraft nach oben, also in entgegengesetzter Richtung zu u_g :

$$F_g^* + F_R^* = -nm g - nm \nu_{12}^* u_g = 0 \implies u_g = -\frac{g}{\nu_{12}^*}.$$

Der Fluss nach unten ist damit gegeben durch

$$\Phi_g = nu_g = -n \frac{g}{\nu_{12}^*}$$

und der Fluss nach oben folgt durch ein ähnliches Gleichgewichtsargument. Der Druckgradient und die Reibungskraft müssen sich im Gleichgewicht auch gerade wieder aufheben:

$$-\frac{dp}{dz} = nm\nu_{12}^* u_p$$

und der Expansionsfluss Φ_p lautet

$$\Phi_p = nu_p = -\frac{1}{m\nu_{12}^*} \frac{dp}{dz}.$$

Für ein Gleichgewicht der Flüsse gilt $\Phi_g + \Phi_p = 0$ woraus unmittelbar die aerostatische Gleichung folgt.

Der Expansionsfluss ist auch ein diffusiver Fluss (weil er durch Stöße reguliert wird). Ein Konzentrationsgradient dn/dz führt nach dem Fick'schen Gesetz zu einem Fluss

$$\Phi_D = -D \frac{dn}{dz}, \quad (2.20)$$

wo der Diffusionskoeffizient D geschrieben werden kann als

$$D_{11} = \frac{kT}{m\nu_{11}^*}, \quad (2.21)$$

wo wir die Indizes 11 verwenden um anzudeuten, dass das Gas in sich selbst diffundiert. Damit gilt für eine isotherme Atmosphäre

$$\Phi_D = -\frac{kT}{m\nu_{11}^*} \frac{dn}{dz} = -\frac{1}{m\nu_{11}^*} \frac{dp}{dz} = \Phi_p, \quad (2.22)$$

wo wir die ideale Gasgleichung verwendet haben. Damit kann die barometrische Atmosphäre auch als die Folge eines diffusiven Gleichgewichtes gesehen werden.

2.1.4 Diffusion und Eddy-Diffusion

Wie schnell gleicht sich eine Inhomogenität in einem Gas aus? Die Antwort wird durch die Diffusionsgleichung geliefert

$$\frac{\partial n}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} \left(D \frac{\partial n}{\partial z} \right), \quad (2.23)$$

wo n die Konzentration eines Stoffes sei, z die Höhe in diesem eindimensionalen Problem und D , wie oben, die Diffusionskonstante. Die Lösung dieser Gleichung lautet

$$n(z, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}} e^{-\frac{z^2}{4Dt}}. \quad (2.24)$$

Eine Inhomogenität der Ausdehnung Z wird in einer Zeit $\tau = Z^2/D$ um einen Faktor $1/e$ reduziert. Diese Zeit ist die Zeitkonstante für die Diffusion.

Die verschiedenen Konstituenten der Atmosphäre haben in der Regel verschiedene Skalenhöhen. Trotzdem beobachten wir bis zur Homopause in etwa 100 km Höhe eine gut durchmischte, homogene Atmosphäre. Im Bereich der Homopause beträgt die Skalenhöhe ca. 10 km und die Diffusionskonstante etwa $200\text{m}^2/\text{s}$. Weil die Diffusionskonstante invers-proportional zur Stoßfrequenz (Glg. 2.21) und diese proportional zur Dichte ist, nimmt die Diffusionszeitkonstante mit abnehmender Höhe in erster Näherung exponentiell ab. Wir könnten also nicht wirklich erklären, warum die Atmosphäre unter der Homopause gut durchmischt ist, die Atmosphäre hätte zu wenig Zeit um Inhomogenitäten auszugleichen, wenn nur Diffusion im Spiel wäre.

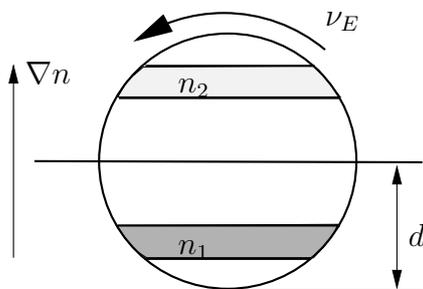


Abbildung 2.10: Diffusiver Transport durch eine Wirbelbewegung (Wirbel = eddy).

durch Drehung um 180 Grad ausgleicht. Der Diffusionskoeffizient wird proportional zur Frequenz ν_E sein, ferner zur Fläche des Wirbels. Weil die Theorie der Turbulenz keinen Ausdruck für diese gibt, wird in der Regel der Eddy-Diffusionskoeffizient gemessen und so in Gleichungen eingesetzt. Der Eddy-Diffusionskoeffizient nimmt an der Turbopause sein Maximum an. Es ist nicht erstaunlich, dass die Homopause etwa in derselben Höhe liegt.

Genau wie der Rauch eines Kamins in der Atmosphäre nicht durch Diffusion, sondern durch Turbulenz verteilt und nach und nach mit der Atmosphäre homogenisiert wird, geschieht dies auch mit allen anderen Inhomogenitäten. Interessanterweise kann man aber die Verteilung oder Homogenisierung mathematisch genau gleich behandeln wie Diffusion, ganz einfach indem man eine größere Diffusionskonstante verwendet. Dies kann einfach eingesehen werden. Abb. 2.10 zeigt sinnbildlich einen mit Turbulenz assoziierten Wirbel, der einen Konzentrationsunterschied $n_2 - n_1$

2.1.5 Heizung von Atmosphären

Strahlungstransfer

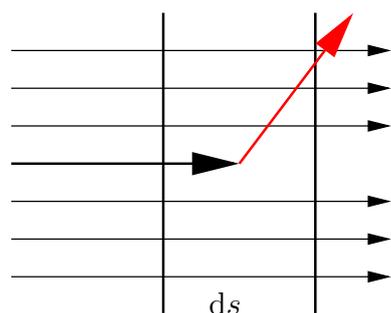


Abbildung 2.11: Beim Durchgang durch eine dünne Schicht ds wird ein Teil der

Eine Atmosphäre kann sowohl von der Planetenoberfläche über Konvektion und Diffusion als Wärmetransportprozesse geheizt werden, wie z.B. in der Troposphäre, als auch durch Strahlung von der Sonne, wie dies in der Ozonschicht und Thermosphäre geschieht. Dabei wird Strahlung absorbiert aber auch wieder emittiert. Dieser Strahlungstransfer ist im Prinzip einfach, der Teufel steckt aber wie immer

im Detail. Wir nehmen der Einfachheit halber an, die Atmosphäre sei lokal im thermodynamischen Gleichgewicht (local thermal equilibrium, LTE). Dann bestimmt die Temperatur das System und wir können für das lokale Spektrum wie auch für das Spektrum der Sonne den Ausdruck von Kirchhoff-Planck verwenden. Für die

Sonne ist dieser Ausdruck eine gute Näherung, wie wir in Kapitel 3 sehen werden.

$$B_\nu(T) = \frac{2h}{c^2} \frac{\nu^3}{e^{h\nu/kT} - 1}, \quad (2.25)$$

bzw. in Wellenlänge

$$B_\lambda(T) = \frac{2h}{\lambda^5} \frac{1}{e^{hc/\lambda kT} - 1}. \quad (2.26)$$

Die Energiedichte in einem gegebenen Wellenlängenintervall $[\lambda, \lambda + d\lambda]$ ist

$$u_\lambda d\lambda = B_\lambda d\lambda = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi d\theta \, d\phi I_\lambda(\theta, \phi) \sin \theta, \quad (2.27)$$

wo I_λ die Intensität bei Wellenlänge λ ist. Dringt die Strahlung durch eine Schicht der Dicke ds und Dichte ρ hindurch (Abb. 2.11), so wird die Intensität sich verändern:

$$dI_\lambda = -\kappa_\lambda \rho I_\lambda ds + j_\lambda \rho ds, \quad (2.28)$$

wo j_λ der Emissionskoeffizient des Gases ist. Die Änderung der Intensität wird also gegeben durch die Differenz zwischen Emission und Absorption im Gas. κ_λ ist der Absorptionskoeffizient des Gases bei Wellenlänge λ und wird auch Opazität genannt. Für $\kappa_\lambda I_\lambda = j_\lambda$ wäre das Strahlungsfeld isotrop und im Gleichgewicht. In der Atmosphäre haben wir aber einen Nettotransport von Strahlung von der Sonne zum Boden. Die Größe $S_\lambda \doteq j_\lambda / \kappa_\lambda$ heißt Quellfunktion und erlaubt uns Gleichung 2.28 etwas einfacher zu schreiben.

$$-\frac{1}{\kappa_\lambda \rho} \frac{dI_\lambda}{ds} = I_\lambda - S_\lambda, \quad (2.29)$$

Diese Gleichung bestimmt den Strahlungstransfer und heißt deshalb Strahlungstransfer-Gleichung. Die Größe $\tau_\lambda = \int_0^s ds \, \kappa_\lambda \rho$ heißt optische Tiefe. Mehrere Prozesse tragen dazu bei:

- **Gebunden-gebunden-Übergänge** zwischen gebundenen Elektronenkonfigurationen in einem Atom, Molekül oder Ion. Dabei wird ein Photon gerade der Energie absorbiert, die benötigt wird, um das Elektron in das angeregte Niveau zu heben. Dies ist offensichtlich ein Prozess, bei dem Absorptionslinien auftreten. Der umgekehrte Prozess, die Reemission des Photons geschieht isotrop. Der Nettoeffekt dieses Prozesses ist also eine Streuung des Photons. Unter bestimmten Umständen kann die Emission in Form von zwei Photonen geschehen, wegen Energieerhaltung wird das Spektrum dadurch also gerötet (hin zu längeren Wellenlängen verschoben).

- **Gebunden-frei Absorption bzw. Photoionisation** tritt auf, wenn ein Photon genügend Energie hat um ein Atom oder Molekül zu ionisieren oder einem Ion ein weiteres Elektron zu entfernen, das Photon also eine Energie oberhalb der Ionisationsenergie aufweist. Dieser Prozess kann recht kompliziert zu beschreiben sein. Fängt das Atom, Molekül oder Ion wieder ein thermisches Elektron ein, so geschieht die isotrope Reemission bei längeren Wellenlängen. Dieser Prozess führt also netto auch zu Streuung und Rötung.
- **Frei-frei Absorption** ist der inverse Bremsstrahlungsprozess. Ein Elektron streut an einem Photon, erfährt dadurch eine Beschleunigung. Dabei kann das Photon absorbiert werden, genau wie bei der Bremsstrahlung ein Photon emittiert wird.
- **Elektronenstreuung** ist genau das - ein Photon wird an einem Elektron gestreut. Der Wirkungsquerschnitt für diesen Prozess ist $\sigma_T = (8\pi/3) \cdot (e^2/m_e c^2)^2 = 6.65 \cdot 10^{-29} \text{ m}^2$ für Thompson Streuung und kleiner für Compton- und Rayleigh-Streuung von Photonen an Elektronen, die in Atomen, Molekülen oder Ionen gebunden sind. Compton Streuung tritt für Photonen auf, die wesentlich kleinere Wellenlängen haben als das Atom, Rayleigh-Streuung für Photonen mit viel längeren Wellenlängen.
- **Photodissoziation** zerlegt ein Molekül in Bruchstücke, z.B. $\text{O}_2 \longrightarrow \text{O} + \text{O}$. Dabei wird die überschüssige Energie als kinetische Energie der Bruchstücke freigesetzt. Das Photon wird absorbiert, es findet zunächst keine Emission statt.
- **Dissoziative Photoionisation** zerlegt ein Molekül in seine Bruchstücke wovon mind. eines ionisiert ist. $\text{N}_2 \longrightarrow \text{N} + \text{N}^+ + \text{e}^-$ ist ein Beispiel.

Photodissoziation, dissoziative Photoionisation und Photoionisation erzeugen neue Moleküle oder Ionen, welche die Atmosphärenchemie stark beeinflussen können. Dabei können sich neue Bindungen ergeben, die wiederum bei der Bildung ein Photon abgeben können. Um den Strahlungstransport durch eine Atmosphäre korrekt zu behandeln ist also eine gute Beschreibung der Atmosphärenchemie erforderlich.

Die oben beschriebenen Prozesse sind nicht alle gleich wahrscheinlich und weisen verschiedene Wirkungsquerschnitte auf. Diese werden zu einem gesamten Absorptions-Wirkungsquerschnitt addiert

$$\sigma_{\text{abs}} = \sigma_{gg} + \sigma_{gf} + \sigma_{ff} + \sigma_{es} + \sigma_{pd} + \sigma_{dpi}, \quad (2.30)$$

oder deren inverse Beiträge zur Gesamtopazität zusammengefasst

$$\kappa_{\lambda} = \kappa_{gg} + \kappa_{gf} + \kappa_{ff} + \kappa_{es} + \kappa_{pd} + \kappa_{dpi}. \quad (2.31)$$

Diese wird nach Mittelung über alle Wellenlängen Rosseland mittlere Opazität oder Rosseland-Opazität, $\bar{\kappa}$, genannt

$$\frac{1}{\bar{\kappa}} = \frac{\int_0^\infty d\lambda \frac{1}{\kappa_\lambda \frac{dB_\lambda}{dT}}}{\int_0^\infty d\lambda \frac{dB_\lambda}{dT}} \quad (2.32)$$

Die Bestimmung der Rosseland-Opazität ist nicht trivial, weshalb sie oft in tabellarischer Form vorliegt. Das gewichtete Mittel bedeutet, dass in transparenten Wellenlängenbereichen mehr Energie transportiert wird als in opaken. Die Wichtung mit dB_λ/dT bedeutet, dass vor allem in den Wellenlängenbereichen Energie transportiert wird, in denen die Kirchhoff-Planck Funktion eine starke Wellenlängenabhängigkeit aufweist.

Jetzt brauchen wir in der Strahlungstransfergleichung 2.29 nur noch die Winkelabhängigkeit einzubauen.

$$-\frac{1}{\kappa_\lambda \rho} \cos \theta \frac{dI_\lambda}{ds} = I_\lambda - S_\lambda, \quad (2.33)$$

Diese Gleichung muss nun gelöst werden. Eine Näherungslösung ist

$$I_\lambda = S_\lambda - \frac{\cos \theta}{\kappa_\lambda \rho} \frac{dS_\lambda}{ds}. \quad (2.34)$$

Sie kann als erste Näherung in einem iterativen Ansatz verwendet werden.

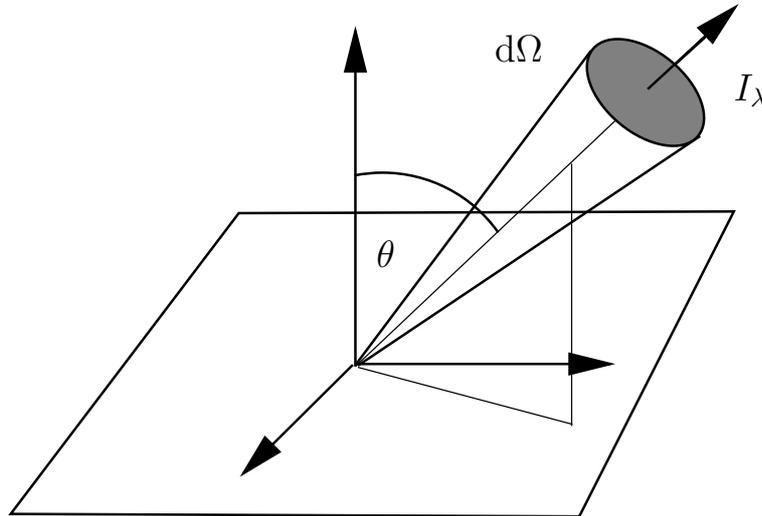


Abbildung 2.12: Geometrie für Strahlungstransferrechnungen.

2.1.6 Der Treibhauseffekt

Als Spezialfall der Strahlungstransfergleichung behandeln wir hier den Durchgang von Strahlung durch eine planetare Atmosphäre. Der Treibhauseffekt,

der auf der Venus besonders dramatisch sichtbar wird und auf der Erde wegen antropogener Beiträge eine zunehmend kritische Rolle spielt, kann in den Grundzügen leicht verstanden werden. Ist die Atmosphäre optisch dünn für sichtbares Licht (in dem Spektralbereich also, in dem im Sonnenspektrum am meisten Energie steckt, siehe Kapitel 3) und optisch dick für Infrarot, so wird die Strahlung, die der Planet (der ja auf einer niedrigeren Temperatur ist, als die Sonne) nach Wienschem Verschiebungsgesetz bei einer größeren Wellenlänge ausstrahlt, innerhalb der Atmosphäre gefangen (siehe Abb. 2.13).

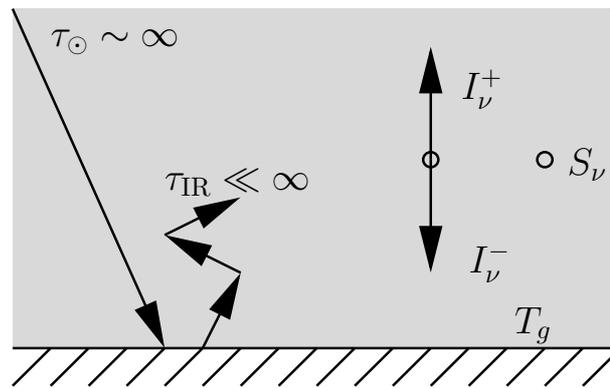


Abbildung 2.13: Zusammenfassung des Treibhauseffektes.

Während dies im Prinzip einfach klingt, ist es die Physik dahinter nicht. Wir werden hier die grundlegenden Züge beschreiben. Der Strahlungsfluss F_{λ} ist gegeben durch

$$F_{\lambda} d\lambda \doteq \int d\Omega \, d\lambda \, I_{\lambda} \cos \theta. \quad (2.35)$$

Das Integral darüber in einem isotropen Medium gibt die wohlbekanntete Formel $\pi F_{\text{rad}} = \sigma T^4$.

Übung 2.4 Zeigen Sie dies!

Die Strahlungstransfergleichung 2.29 kann auch in der Form

$$\mu \frac{dI_{\lambda}}{d\tau_{\lambda}} = S_{\lambda} - I_{\lambda} \quad (2.36)$$

geschrieben werden, wo $\mu = \cos \theta$ (siehe Abb. 2.12), S_{λ} die Quellfunktion, I_{λ} die Intensität und τ_{λ} die optische Tiefe bei Wellenlänge λ ist. Sie kann in Frequenz umgeschrieben werden

$$\mu \frac{dI_{\nu}}{d\tau_{\nu}} = S_{\nu} - I_{\nu}, \quad (2.37)$$

die Form, die wir für unsere Untersuchung des Treibhauseffekts brauchen werden. Dazu werden wir auch die sog. Zwei-Strom-Näherung verwenden. Bei dieser nehmen wir an, dass in jeder Atmosphärenschicht die Intensität I_{ν} isotrop

sei in den beiden Hemisphären, die nach oben und nach unten zeigen. Die beiden Intensitäten brauchen aber nicht übereinzustimmen. Wir nennen die nach oben zeigende Intensität I_ν^+ und die nach unten zeigende I_ν^- . Ferner nehmen wir an, dass die Atmosphäre für die sichtbare Strahlung optisch dünn sei. Dies bedeutet, dass die Atmosphäre von unten durch Strahlung von der warmen planetaren Oberfläche, die sich bei einer Temperatur T_g befindet, geheizt wird. Weil die Atmosphäre von oben nicht geheizt wird, gilt am oberen Rand der Atmosphäre $I_\nu^-(\tau = 0) = 0$, wo die optische Tiefe vom oberen Rand der Atmosphäre aus gemessen wird. Dort gilt $\tau = 0$, was auch definiert, was "am oberen Rand" der Atmosphäre bedeutet. Wir wiederholen hier den Strahlungsfluss F_ν aus Glg. 2.35 aber in der Frequenzdarstellung.

$$F_\nu d\nu \doteq \int d\Omega d\nu I_\nu \mu.$$

Die Integration über eine Kugelschale kann im zylindrisch symmetrischen Fall auch über $\mu = \cos \vartheta$ geführt werden.

$$\int d\Omega = 2\pi \int d\theta \sin \theta = 2\pi \int_{-1}^{+1} d\mu.$$

Übung 2.5 Zeigen Sie dies!

In der Zweistromnäherung kann F_ν geschrieben werden als

$$F_\nu = \pi (I_\nu^+ - I_\nu^-). \quad (2.38)$$

Übung 2.6 Zeigen Sie dies! Hinweis: Unterteilen sie die Integration über μ in zwei Hälften, eine für I_ν^+ und eine für I_ν^- .

Der Strahlungsfluss in die und aus der Atmosphäre muss erhalten bleiben und folglich muss gelten

$$\frac{dF_\nu}{d\tau} = 0 \quad (2.39)$$

Für eine horizontal geschichtete Atmosphäre ist die optische Tiefe eine eindeutige Funktion der Höhe und folglich gilt auch $dF_\nu/dz = 0$. Dies würde sich für eine sphärisch gekrümmte Atmosphäre ein wenig ändern, allerdings ist die Atmosphäre dünn im Vergleich zum Krümmungsradius der Erde (oder eines anderen Planeten), deshalb nehmen wir die Atmosphäre als flach und horizontal geschichtet an. Dann gilt $dF_\nu/dz = 0$ in guter Näherung.

Wir verwenden nun diese Erhaltung um für jeden Ort in der Atmosphäre einen Ausdruck für die Intensitäten nach oben und unten zu erhalten. Dazu integrieren wir die Strahlungstransfergleichung 2.37 über eine Kugel. Das Integral über die Quellfunktion S_ν ist gerade die Kirchhoff-Planck-Funktion B_ν für eine Atmosphäre im lokalen thermodynamischen Gleichgewicht. Man könnte auch sagen, dass dies das lokale thermodynamische Gleichgewicht definiert. Wir definieren noch die gemittelte Intensität J

$$J_\nu \doteq \frac{\int d\Omega I_\nu}{\int d\Omega} \quad (2.40)$$

Im isotropen Fall würde gelten $J_\nu = I_\nu$ und folglich definieren wir analog $J_\nu^+ = I_\nu^+$ und $J_\nu^- = I_\nu^-$. Mit der Zweistromnäherung in der Strahlungstransfergleichung ergibt das Integral über eine Kugel

$$\frac{d}{d\tau} \int d\Omega \mu I_\nu = \int d\Omega (S_\nu - I_\nu) \quad (2.41)$$

$$\frac{d}{d\tau} 2\pi \int_{-1}^{+1} d\mu \mu I_\nu = 2\pi \int_{-1}^{+1} d\mu (S_\nu - I_\nu) \quad (2.42)$$

$$\frac{d}{d\tau} F_\nu = 2\pi \int_{-1}^{+1} d\mu S_\nu - 2\pi \int_0^{+1} d\mu I - 2\pi \int_{-1}^0 d\mu I \quad (2.43)$$

$$\frac{dF_\nu}{d\tau} = 4\pi B_\nu - 2\pi I_\nu^+ - 2\pi I_\nu^-. \quad (2.44)$$

Mit $\frac{dF_\nu}{d\tau} = 0$, Anwendung der Zwei-Stromnäherung (Glg. 2.38) und nach Addition von $2\pi I_\nu^\pm$ erhalten wir

$$I_\nu^+ = B_\nu + \frac{1}{2\pi} F_\nu, \quad (2.45)$$

$$I_\nu^- = B_\nu - \frac{1}{2\pi} F_\nu. \quad (2.46)$$

An der Planetenoberfläche setzen wir

$$I_{\nu g}^+ = B_\nu(T_g) = B_\nu(T_1) + \frac{1}{2\pi} F_\nu, \quad (2.47)$$

wo wir die Temperatur T_1 gerade oberhalb der Planetenoberfläche eingeführt haben. An der Oberfläche selber herrscht eine Temperatur T_g . Die beiden Temperaturen müssen, ja können formal nicht übereinstimmen, weil F_ν einen endlichen und von Null verschiedenen Wert hat. Allerdings werden sich die beiden Temperaturen durch Konvektion und Wärmeleitung, die wir hier außer Acht gelassen haben, angleichen, was den Temperatursprung an der Oberfläche verringert.

Am oberen Rand der Atmosphäre verschwindet die nach unten gerichtete Intensität, $I_\nu^- = 0$ und folglich

$$B_\nu(T_0) = \frac{1}{2\pi} F_\nu, \quad (2.48)$$

wo T_0 die lokale Temperatur oben an der Atmosphäre ist, sie heißt ‘‘Skin-Temperatur’’, Hauttemperatur. Damit finden wir nun am oberen Rand die Intensität nach außen

$$I_{\nu\text{top}}^+ = B_\nu(T_0) + \frac{1}{2\pi} F_\nu = 2B_\nu(T_0), \quad (2.49)$$

was zunächst erstaunlich aussieht. Die nach außen gerichtete Intensität am oberen Rand der Atmosphäre ist doppelt so groß wie die eines schwarzen Körpers derselben Temperatur! Der Grund dafür ist, dass die Randbedingung dort $I_{\nu\text{oben}}^- = 0$ lautet und deshalb die ‘‘fehlende Hälfte’’ der Intensität nach oben

abgestrahlt wird. Diese Randbedingung bedeutet auch, dass die Strahlungsintensität am oberen Rand effektiv aus tieferen Schichten stammt, also aus Schichten für die die optische Tiefe größer ist als Null. Diese Schichten sind heißer. Die Strahlung aus tieferen Schichten kann den oberen Rand erreichen weil die Atmosphäre opak ist.

Übung 2.7 *Verifizieren Sie die Rechnungen bis zu diesem Schritt!*

Der Ort, von dem die Strahlung stammt, kann einfach ermittelt werden. Dazu integrieren wir vorerst Glg. 2.49 über die Frequenz und erhalten

$$\begin{aligned} \int d\nu I_{\nu\text{top}}^+ &= 2 \int d\nu B_\nu(T_0), \\ T_{\text{eff}}^4 &= 2T_0^4. \end{aligned} \quad (2.50)$$

Die Atmosphäre strahlt also mit einer effektiven Temperatur T_{eff} und wir müssen nun den Ort der Atmosphäre ermitteln, bei welchem sie die Temperatur T_{eff} aufweist. Dazu bestimmen wir das Temperaturprofil der Atmosphäre. Wir multiplizieren die Strahlungstransfergleichung mit $\mu = \cos(\vartheta)$ und integrieren über eine Kugel.

$$\frac{4\pi}{3} \frac{d}{d\tau} J_\nu = -F_\nu.$$

Mit Glg. 2.44 und $\frac{dF_\nu}{d\tau} = 0$ erhalten wir

$$\frac{4\pi}{3} \frac{dB_\nu}{d\tau} = -F_\nu \quad \text{und folglich} \quad \frac{dB_\nu}{d\tau} = -\frac{3}{4\pi} F_\nu, \quad (2.51)$$

eine einfache Differentialgleichung für B_ν mit Randbedingung $B_\nu(T_0, \tau = 0) = 1/(2\pi)F_\nu$. Wir integrieren

$$\int dB_\nu = -\frac{3}{4\pi} F_\nu \int d\tau = -\frac{3}{2} B_\nu(T_0) \tau + \text{const.},$$

wo die Integrationskonstante von der Randbedingung $B_\nu(\tau = 0) = B_\nu(T_0)$ stammt. Das Temperaturprofil lautet also

$$B_\nu(\tau) = B_\nu(T_0) \left(1 + \frac{3}{2}\tau\right). \quad (2.52)$$

Übung 2.8 *Wo hat das Vorzeichen von τ gewechselt?*

Integration über die Frequenz und unter Verwendung von $\pi \int d\nu B_\nu(T) = \sigma T^4$ erhalten wir

$$T^4(\tau) = T_0^4 \left(1 + \frac{3}{2}\tau\right). \quad (2.53)$$

Die Strahlung der effektiven Temperatur T_{eff} stammt aus der optischen Tiefe $\tau = 2/3$.

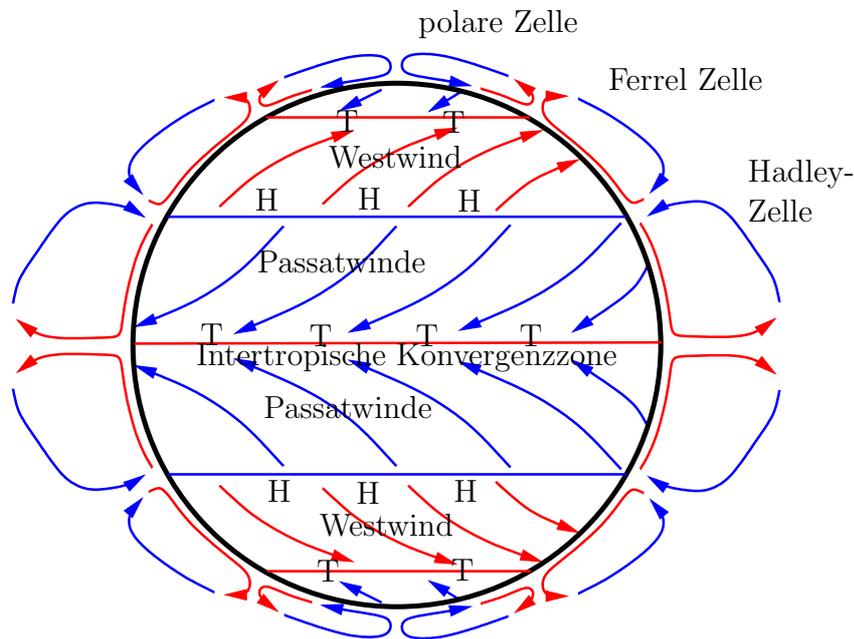


Abbildung 2.14: Das atmosphärische Zirkulationssystem der Erde wird durch die intertropische Konvergenzzone und das absinken der kalten polaren Luftmassen angetrieben.

Wir können mit Kenntnis der effektiven Temperatur nun auch die Bodentemperatur abschätzen. Mit

$$B_\nu(T_g) = B_\nu(T_1) + \frac{1}{2\pi} F_\nu = B_\nu(T_1) + B_\nu(T_0) = B_\nu(\tau_g) + B_\nu(T_0),$$

wo $B_\nu(T_1) \doteq B_\nu(\tau_g)$ und Glg. 2.52 erhalten wir

$$B_\nu(T_g) = 2B_\nu(T_0) \left(1 + \frac{3}{4}\tau_g \right)$$

und schließlich

$$T_g^4 = T_{\text{eff}}^4 \left(1 + \frac{3}{4}\tau_g \right). \quad (2.54)$$

Wie bereits erwähnt kann der Gradient in der unmittelbaren Nähe des Bodens erheblich sein. Dies tritt auf, weil Konvektion und Wärmeleitung hier vernachlässigt worden sind. In der Tat kann jetzt hier das Schwarzschild-Kriterium für Stabilität angewendet werden um herauszufinden, ob Konvektion eintritt.

2.1.7 Atmosphärische Zirkulation

Unter atmosphärischer Zirkulation verstehen wir die großskalige Bewegung von Atmosphärenmassen. Dabei spielen die drei Eingangs dieses Kapitels beschriebenen Prozesse eine wesentliche Rolle. Gibt es eine Wärmequelle, tritt oft

Konvektion auf. Unterschiede im Luftdruck, also Druckgradienten, gleichen sich durch Winde aus. Diese können über Reibung andere Atmosphärenmassen mitbewegen. Diese drei Prozesse Konvektion, Druckausgleich und Reibung, führen zu einer komplizierten atmosphärischen Zirkulation auf der Erde (siehe Abb. 2.14) wie auch auf anderen Planeten. Auf Jupiter bilden sich in der Folge die bekannten Bänder aus (Abb. 2.16 unten). Auf der Erde wird das Zirkulationssystem durch die in der intertropischen Konvergenzzone aufsteigenden warmen und die an den Polen absinkenden kalten Luftmassen angetrieben. Die am Äquator (eigentlich am thermischen Äquator, der dem Zenitstand der Sonne folgt) aufsteigenden Luftmassen divergieren in der Höhe nord- und südwärts, kühlen dabei ab und sinken in ca. 30° Breite nach unten. Dort entsteht in der Folge ein Hochdruckgebiet, welches aufgrund der Corioliskraft die Passatwinde und die in mittleren Breiten üblichen Westwinde treibt. Diese Zirkulationszelle heißt Hadley-Zelle. In ca. 60° Breite sind die Luftmassen noch ausreichend feucht und warm um eine konvektive Strömung anzutreiben. Sie steigen auf, divergieren auch süd- und nordwärts. An den Polen sinkt die kalte Luft ab, die polare Zelle hat sich gebildet. Die kalte polare Luft fließt als Ostwind bis ca. 60° Breite, wo sie auf den warmen Westwind trifft. Diese polaren Winde erzeugen auch die sog. Rossby-Wellen, welche den Verlauf des Jetstream beeinflussen. Die Hadley- und die polare Zelle sind sog. thermisch direkte Zirkulationszellen, sie werden unmittelbar durch warme Oberflächentemperaturen getrieben. Sie sind die dominanten wetterbeeinflussenden Faktoren in ihren Breiten, eine stets veränderliche Abfolge von Hoch- und Tiefdruckgebieten, wie wir dies in mittleren Breiten kennen, ist in ihrem Einflussbereich nur in ungewöhnlichen Umständen möglich.

Zwischen der Hadley- und der polaren Zelle entsteht die Ferrel-Zelle, die wie ein Kugellager zwischen den beiden direkten Zellen wirkt. Sie treibt die in mittleren Breiten überwiegenden Westwinde, die aber je nach Wettersituation auch zum Erliegen kommen können.

Im Gegensatz zu anderen Planeten, spielen Ozeane wegen ihrer im Vergleich zu Landmassen hohen spezifischen Wärme für das irdische Wetter eine wichtige Rolle, davon der Pazifik als größter Ozean die wichtigste. Neben den drei Zellen der Breitenzirkulation entwickelt sich aufgrund von Temperaturdifferenzen im Pazifik eine longitudinale Zirkulationszelle, die Walker-Zelle. Abb. 2.15 zeigt das Pribzip. Starke Konvektionsströmungen über Südostasien und niedersinkende kühle Luftmassen über Südamerikas Westküste erzeugen einen Wind, der das warme Oberflächenwasser des Pazifiks westwärts an die australische Ostküste und die ostasiatischen Inseln drückt. Als Folge ist der Wasserspiegel im Westen des Pazifiks ca. 60 cm höher als im Osten. Der Ostwind an der Oberfläche wird durch einen Westwind in der Höhe zu einer longitudinalen Zirkulationszelle ergänzt. Wenn sich die konvektive Aktivität im Westpazifik aus nicht verstandenen Gründen verlangsamt, kommen die Westwinde in der Höhe zum Erliegen und unterbrechen so den Zufluss und das Niedersinken kalter Luft über der Westküste Südamerikas, was die Zirkulation abschwächt. Das warme Wasser des Westpazifiks fließt nun ostwärts, was zusammen mit

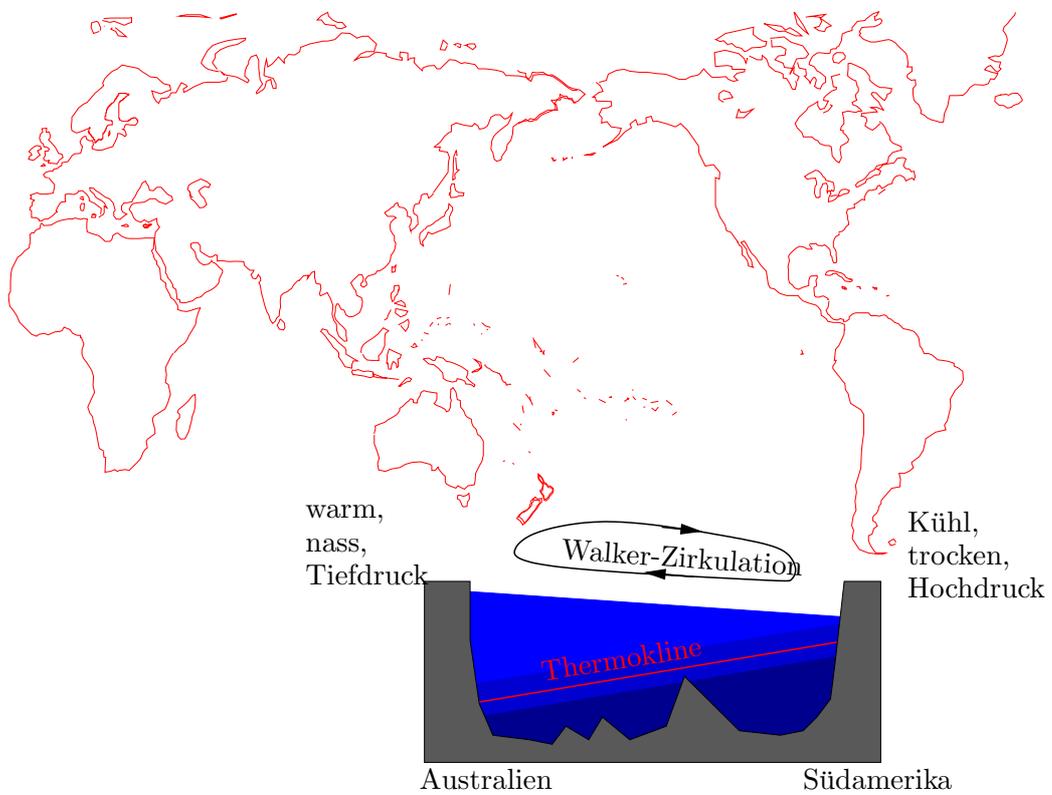


Abbildung 2.15: Die Walker-Zirkulation treibt den ENSO.

den schwächeren Winden zu ungewöhnlichen Wetterverhältnissen in Süd- und Nordamerika, Australien und Südafrika führt. Diese Situation tritt sporadisch ein und korrigiert sich auch von selber wieder. Walker hat sie die südliche Oszillation (Southern Oscillation) genannt. Sie ist die Ursache für das El Niño-Phänomen, welches oft auch ENSO (El Niño - Southern Oscillation) genannt wird.

Übung 2.9 Recherchieren Sie El Niño!

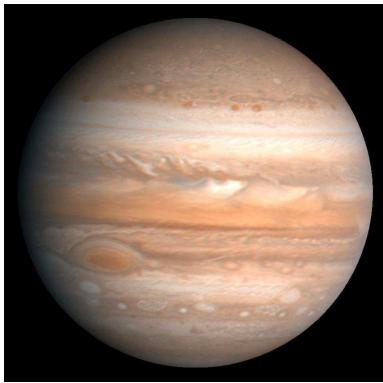
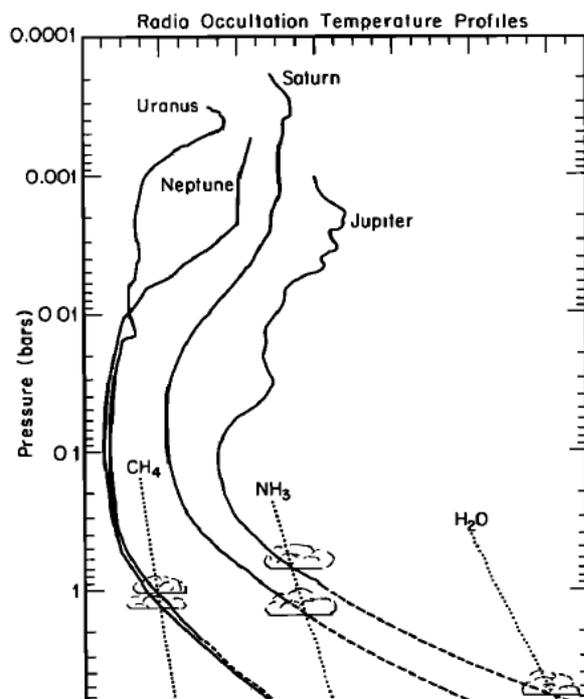


Abbildung 2.16: Die Winde auf Jupiter sind um ein Vielfaches stärker als auf der Erde. Quelle: USGS/Voyager/Wikipedia

Die stärksten planetaren Zirkulationen im Sonnensystem weist Jupiter auf. Seine hellen und dunklen Bänder heißen Zonen und Gürtel und sind nach Breitengraden geordnet. Die dunklen Gürtel sehen etwas chaotisch und unregelmäßig aus, während die helleren Zonen gleichmäßiger sind. Die verschiedenen Farben sind wahrscheinlich auf Verfärbungen von Phosphor-, Schwefel und Kohlenwasserstoffverbindungen durch das Ultraviolett der Sonne zurückzuführen. Zwischen den Gürteln und Zonen befinden sich seit mindestens hundert Jahren stabile west- und ostwärts gerichtete "Jets" mit Geschwindigkeiten von bis zu 180 m/s. Sie werden getrieben von kleinskaligen Wirbeln, die ihre Energie (und den Impuls) in die Jets transferieren. Die großen Ovale rollen in antizyklonischem Sinn (Uhrzeigersinn in der Nordhalbkugel) zwischen den Jets und assimilieren die kleinskaligen antizyklonischen Wirbel. Der große rote Fleck ist das bekannteste Beispiel und wurde schon von Cassini (1625 -1712) beobachtet.



Woher stammt die Energie für diese starken Strömungen? Jupiter ist etwa fünf Mal weiter weg von der Sonne als die Erde und erhält also etwa 25 mal weniger Energie von der Sonne, als zum Antrieb der irdischen Zirkulation zur Verfügung steht. Seine Rotationsachse ist nur 3,13° von der Bahnsenkrechten geneigt, weshalb fast keine jahreszeitlichen Schwankungen zu erwarten sind. Eine solare Ursache für die starken Jets scheint al-

so unwahrscheinlich. Als Gasplanet hat aber Jupiter eine weitere Wärmequelle, die adiabatische Kontraktion. Jupiter schrumpft Jahr für Jahr ca. 2cm, was ihm etwa gleich viel Energie zur Verfügung stellt, wie Sonnenenergie auf ihn trifft. Der Energiefluss vom Inneren vermag gewaltige

Konvektionsströmungen zu treiben. Aus Galileo-Beobachtungen wissen wir, dass in den Gürteln innert Tagen bis zu 1000 km große, hohe optisch dichte und weiße Wolken bilden, die mit erheblicher Blizttätigkeit assoziiert sind. Ihre Obergrenzen liegen bei einigen hundert mbar wo NH_3 , H_2S und Wasser kondensieren können (siehe Abb. 2.17). In der Nachbarschaft dieser Cluster befinden sich bei ca. 3 bar, wo nur Wasser kondensieren kann, Wolken in größerer Tiefe von ca. 50 km. Die Unterkanten der Wolken und Cluster liegen vermutlich noch ca. 30 km tiefer, zwischen Ober- und Unterkante der Cluster liegen also ca. 80 km, oder 0.1% des Jupiterradius. *Ingersoll et al.* (2000) erklären nun die Strömungen als eine Folge von Konvektion von feuchtem Gas aus tiefen Schichten. Blitze bilden sich in Folge dieser Konvektion, ähnlich wie irdische Gewitter. Die hohen Clusterwolken (Stürme) müssen in der Höhe divergieren und die Gasmassen infolge der Corioliskraft in einem Wirbel enden. Weil diese Stürme relativ hoch in Jupiters Atmosphäre angesiedelt sind, können sie als zwei-dimensionale Wirbel aufgefasst werden. In zwei Dimensionen müssen Wirbel zu einem größeren verschmelzen und so entstehen die großen Ovale, die wochenlang überleben. Ein ähnliches Szenario wurde während des Vorbeifluges der Cassini-Sonde mit ca. 26'000 Bildern bestätigt *Porco et al.* (2003).

Die Atmosphären der Riesenplaneten weisen alle gewisse Ähnlichkeiten auf, sodass die Untersuchungen an Jupiter z. T. auch auf die anderen Gasplaneten übertragen werden können. Abb. 2.17 zeigt z. B., dass die Druck-Temperaturprofile von Jupiter, Saturn, Uranus und Neptun alle ein Temperaturminimum bei ca. 100 mbar aufweisen. Die Temperaturen dort betragen für Jupiter ca. 110 K, für Saturn ca. 82 K und 54 und 50 K für Uranus und Neptun.

2.1.8 Exosphären

Ab einer bestimmten Höhe, der sog. Exobase, erfahren Luftmoleküle, deren Geschwindigkeitsvektor nach außen zeigt, statistisch weniger als einen Zusammenstoß mit anderen Luftmolekülen. Haben sie sogar eine Geschwindigkeit, die die Fluchtgeschwindigkeit an diesem Ort übersteigt, so können sie also von der Erde oder einem Planeten entweichen. Dieser Bereich der Atmosphäre heißt Exosphäre. Die Anzahl Stöße, die ein Luftmolekül einer Sorte 1 auf dem Weg nach außen durch ein Hintergrundgas bestehend aus Teilchen der Sorte 2

erfährt, ist gegeben durch

$$N_\nu(h) = \int_h^\infty \nu_{1,2}(z)/\bar{c} dz = \sigma_{1,2} \sqrt{1 + m_1/m_2} \int_h^\infty n_2(z) dz,$$

wo $\nu_{1,2}$ die Stoßfrequenz von Teilchensorte 1 mit Teilchensorte 2 und $\sigma_{1,2}$ der Wirkungsquerschnitt für diese Stöße sind. Die Stoßfrequenz $\nu_{1,2}$ geteilt durch die mittlere Geschwindigkeit \bar{c} ist gerade die inverse mittlere freie Weglänge. Davon haben wir die von der Höhe unabhängigen Anteile vor das Integral gezogen. In der obigen Gleichung taucht eine wichtige neue Größe auf, die sog. Kolonnendichte, die Anzahl Teilchen pro Fläche, bzw. die Anzahl Teilchen oberhalb einer gegebenen Fläche:

$$\mathcal{N}(h) \doteq \int_h^\infty n(z) dz. \quad (2.55)$$

Mit der Variablentransformation $ndz = -dp/mg$ erhalten wir

$$\mathcal{N}(h) = - \int_{p(h)}^0 \frac{dp}{mg} \sim - \frac{1}{mg(h)} \int_{p(h)}^0 dp = \frac{p(h)}{mg(h)} = \frac{n(h)kT(h)}{mg(h)} \sim n(h)H(h), \quad (2.56)$$

die Kolonnendichte ist also ungefähr das Produkt aus Dichte in der Höhe h und Skalenhöhe $H(h)$, oder, anders ausgedrückt, die Kolonnendichte in einer barometrischen Atmosphäre wird dominiert durch die lokale Dichte. Diese Näherung gilt natürlich nur, wenn wir die Größen wie oben vor das Integral ziehen dürfen.

Übung 2.10 *Ist dies für $g(h)$ erlaubt? Wie groß ist der Fehler? Nehmen Sie als Temperatur $T = 1000K$ an und als Basis $h = 400km$.*

In einer schlecht durchmischten Atmosphäre (die Dichteskalenhöhen sind masseabhängig!) addieren sich die Kolonnendichten.

Mit Glg. 2.56 können wir nun die Höhe h_{EB} der Exobase definieren

$$N_\nu(h_{EB}) \sim \sigma_{1,2} \sqrt{1 + m_1/m_2} n_2(h_{EB}) H_2(h_{EB}) = H_2(h_{EB})/\lambda_{1,2}(h_{EB}) = 1. \quad (2.57)$$

Dies bedeutet, dass die mittlere freie Weglänge $\lambda_{1,2}$ eines Gases 1 in einem Gas 2 (in der Exosphäre insbesondere Wasserstoff in Sauerstoff) an der Exobase gerade gleich der Skalenhöhe des Gases 2 wird. Dieses Verhältnis von mittlerer freier Weglänge und Skalenhöhe heißt *Knudsenzahl*. Die Knudsenzahl an der Exobase beträgt also gerade Eins. Der darüberliegende Teil der Atmosphäre wird Exosphäre genannt.

Am Übergang Atmosphäre - Weltraum bildet sich bei jeder Atmosphäre eine Exosphäre. Bei Merkur und einigen Monden besteht die Atmosphäre ausschließlich aus einer Exosphäre. Diese wurden bei Merkur und Mond durch Beobachtung von Emissionslinien von Natrium auch klar nachgewiesen (*Potter und Morgan, 1997*). Abb. 2.18 zeigt die historische Aufnahme der Na D₁

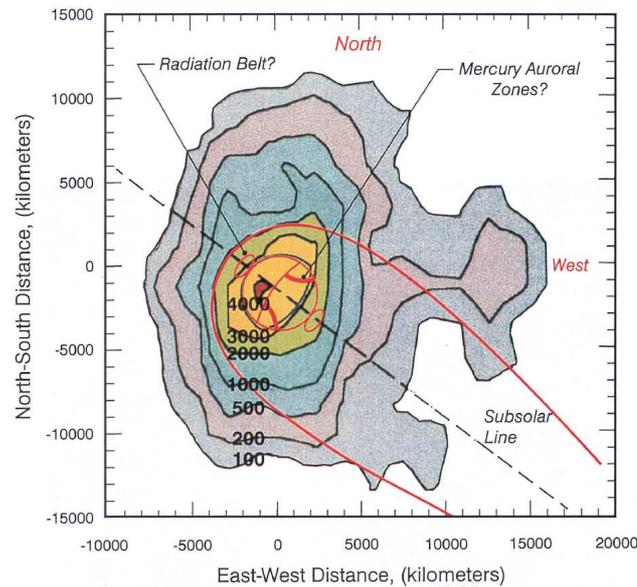


Abbildung 2.18: Na D₁ und D₂ Linienemission aufgenommen am 24. Oktober 1995. Kontourlinien geben die Emission in kilorayleigh an. Nach *Potter und Morgan (1997)*.

und D₂ Linien, wie sie am 24. Oktober 1995 aufgenommen wurde. Kontourlinien geben die Emission in kilorayleigh (kR) an. Ein Rayleigh entspricht der isotropen Emission von 10^6 Photonen in einer Sekunde aus einer Kolonne mit Basisfläche 1 cm^2 . Der so gemessenen Intensität der Na Linien entspricht also eine Kolonnendichte von Na. Ähnliche Beobachtungen gibt es auch vom Mond.

Übung 2.11 *Bestimmen Sie die line-of-sight Intensität unter Annahme einer radialsymmetrischen Dichte, die exponentiell abnimmt! Vergleichen Sie die so bestimmten Intensitätsprofile mit den wahren.*

Zur Bestimmung der Verhältnisse in einer Exosphäre müssen wir vorerst die Fluchtgeschwindigkeit an der Exobase kennen.

$$v_{\text{esc}}(r) \doteq \sqrt{\frac{2GM}{r}}, \quad (2.58)$$

wo G die Gravitationskonstante, M die Masse des Planeten und r der Abstand zum Planetenzentrum ist. Teilchen mit einer größeren Geschwindigkeit sind ungebunden und haben eine positive Energie³, Teilchen mit einer Geschwindigkeit

$$v_{\text{orb}}(r) \doteq \sqrt{\frac{GM}{r}} \quad (2.59)$$

können den Planeten im Abstand r noch gerade umkreisen, befinden sich also auf gebundenen Bahnen negativer Energie. Teilchen mit noch weniger Energie

³Wir definieren gebundene Teilchen als Teilchen mit negativer Energie. Es kostet Energie, sie aus dem Gravitationspotential zu entfernen.

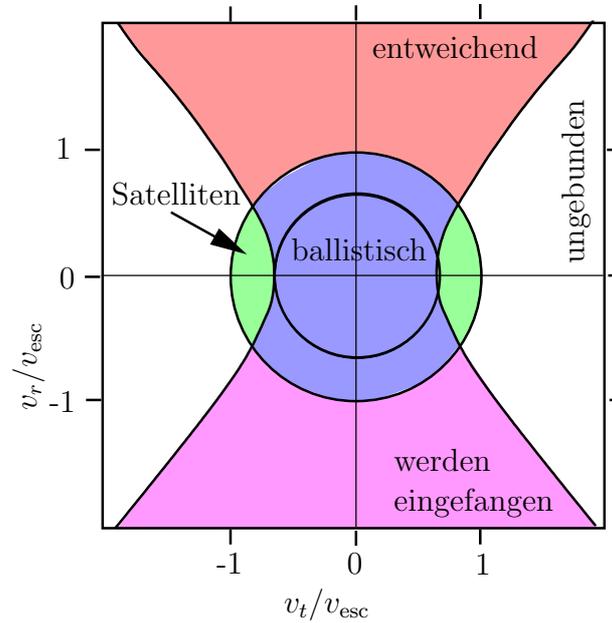


Abbildung 2.19: Typen von Umlaufbahnen für exosphärische Teilchen. Siehe Text und die entsprechende Übung für eine eingehendere Diskussion.

können den Planeten nicht verlassen und stoßen zwangsläufig mit der Oberfläche oder der Exobase zusammen. Sie befinden sich allenfalls auf ballistischen Trajektorien.

Wir unterteilen nun die Geschwindigkeiten in einen radialen und einen transversalen Anteil, v_r und v_t . Die radiale Komponente trägt nicht zum Drehimpuls $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$ des Teilchens bei. Wir können jetzt alle Teilchen in Klassen einteilen. Abb. 2.19 zeigt v_r und v_t in Einheiten der Fluchtgeschwindigkeit v_{esc} . Teilchen mit negativer Radialgeschwindigkeit und einer ungenügenden transversalen Geschwindigkeit werden an der Exobase durch Stöße mit Atmosphärenpartikeln oder der Planetenoberfläche eingefangen. Sie sind violett (magenta) schattiert. Teilchen unterhalb der Fluchtgeschwindigkeit bleiben immer gefangen; ist die transversale Geschwindigkeit groß genug, so können sie in einer Umlaufbahn bleiben, sonst können sie allenfalls ballistische Bahnen beschreiben. Teilchen mit geeigneten Radialgeschwindigkeiten und $v^2 = v_r^2 + v_t^2 > v_{\text{esc}}^2$ können entweichen (rot schattiert). Die weißen Gebiete kennzeichnen diejenigen Teilchen, die auf ungebundenen (hyperbolischen) Bahnen am Planeten vorbeifliegen.

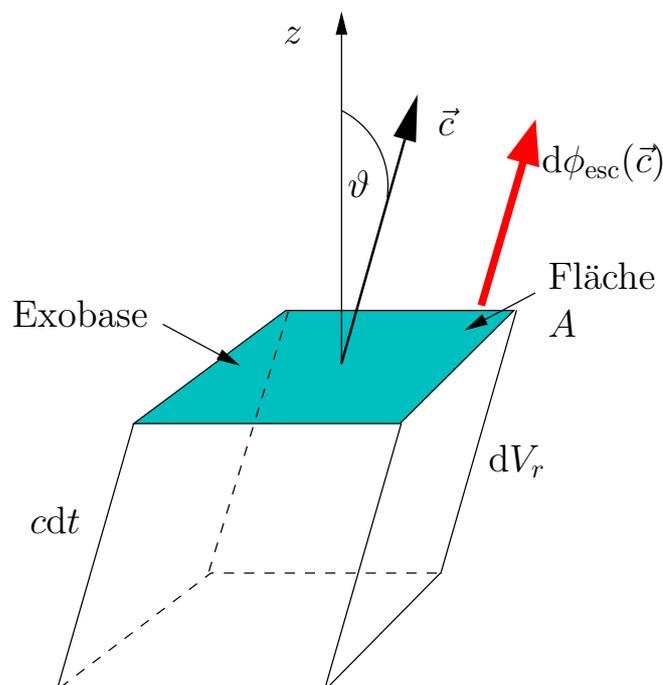
Übung 2.12 Zeigen Sie, dass die Hyperbeln in Abb. 2.19 gegeben sind durch

$$\frac{v_r^2}{v_{\text{esc}}^2} = \frac{v_t^2}{v_{\text{esc}}^2} \left(\frac{r^2}{r_b^2} - 1 \right) + \left(1 - \frac{r}{r_b} \right),$$

wo r_b der Radius der Exobase ist.

2.2 Atmosphärische Verlustprozesse

2.2.1 Jeans Escape



Wenn die Geschwindigkeit eines Luftmoleküls an der Exobase die Fluchtgeschwindigkeit übersteigt, so wird das Molekül entweichen. Dabei nehmen wir vereinfachend an, dass es oberhalb der Exobase keinen Stoß mehr erfährt. Nehmen wir weiter vereinfachend an, dass an der Exobase eine Maxwellverteilung herrscht, so können wir leicht berechnen, wie groß der Anteil der Verteilung ist, der entweicht. Dazu untersuchen wir mit den in Abb. 2.20 angegebenen Größen den Fluss von Molekülen, die entweichen können. Der Anteil von Molekülen mit Geschwindigkei-

Abbildung 2.20: Konfiguration im Geschwindigkeitsraum und Definitionen für die Diskussion im Text.

$$dN(\vec{c}) = f_M dV_r d^3c = f_M A c dt \cos \vartheta d^3c$$

und der entsprechende Anteil am Fluss ist

$$d\phi(\vec{c}) = \frac{dN(\vec{c})}{Adt} = f_M c \cos \vartheta d^3c.$$

Um den Anteil am Fluss zu bestimmen müssen wir nun die Verteilung über die Geschwindigkeiten integrieren, für die $c_z > 0$ und $c > c_{\text{esc}}$, wo c_{esc} die Fluchtgeschwindigkeit an der Exobase ist. In Kugelkoordinaten erhalten wir

$$\phi_{\text{esc}}(h_{\text{EB}}) = \frac{n(h_{\text{EB}})}{(\sqrt{\pi}c_w)^3} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/2} d\vartheta \int_{c_{\text{esc}}}^{\infty} dc c^3 e^{-(c/c_w)^2} \cos \vartheta \sin \vartheta,$$

wo wir $d^3c = c^2 \sin \vartheta d\vartheta d\varphi dc$ verwendet haben. $c_w = (2kT/m)^{1/2}$ ist die wahrscheinlichste Geschwindigkeit in der Maxwellverteilung (Ableitung gleich Null setzen und nach c auflösen). Die Integrale über φ und ϑ können separat geführt werden und ergeben 2π und $\pi/2$. Mit der Substitution $x = (c/c_w)^2$ und nach partieller Integration erhalten wir für den entweichenden Fluss ϕ_{esc}

$$\phi_{\text{esc}} = n(h_{\text{EB}}) \frac{c_w}{2\sqrt{\pi}} e^{-x_{\text{esc}}} (1 + x_{\text{esc}}), \quad (2.60)$$

wo $x_{\text{esc}} = (c_{\text{esc}}/c_w)^2$. Es ist nun einfach zu berechnen, wie lange es braucht, bis z. B. aller Wasserstoff aus der irdischen Atmosphäre entwichen ist.

Übung 2.13 *Schätzen Sie die Entweichzeit für Wasserstoff und Helium aus der irdischen Atmosphäre ab.! Hinweis: Dividieren Sie den Wasserstoffgehalt der Atmosphäre durch den entweichenden Fluss.*

2.2.2 Andere Verlustmechanismen

Sonnenwind

Der Sonnenwind kann als Ionisationsagent in polaren Breiten zu einem erhöhten Atmosphärenverlust führen. Bei Planeten ohne Magnetosphären reißt er die ionisierten atmosphärischen Ionen als sog. Pickup-Ionen mit und führt damit zu einem weiteren atmosphärischen Verlust. Die Magnetosphäre (siehe Kapitel 6) schützt die irdische Atmosphäre vor diesem zusätzlichen Verlustprozess. Die Atmosphäre von Mars hat ist höchstwahrscheinlich durch diesen Prozess verloren gegangen. Nachdem der Dynamo⁴ des Mars nach etwa einer Milliarde Jahren zum Erliegen gekommen ist, war die Marsatmosphäre dem Sonnenwind “schutzlos ausgeliefert”.

Heizung

Wie wir in Kapitel 4 sehen werden, wird die obere Atmosphäre stark geheizt. Insbesondere während Phasen erhöhter solarer Aktivität führt dies wegen der damit einhergehenden zusätzlichen Heizung zu einem stark erhöhten Jeans-Verlust. Die Intensität des für die Heizung der oberen Atmosphärenschichten wichtige solare UV variiert viel stärker als die bolometrische Luminosität. Etwa 40% der Variationen in der Solarkonstanten werden Variationen im UV zugeschrieben.

Late Heavy Bombardment

Ein weiterer wichtiger atmosphärischer Verlustprozess wurde von *Melosh* und *Vickery* (1989) vorgeschlagen. Trifft ein Impaktor auf eine Planetenoberfläche, so kann er die darüberliegende Atmosphäre mit der folgenden Stoßwelle weg-erodieren. Dazu muss der Impaktor den Planeten mit einer Geschwindigkeit treffen, die hoch genug ist um sich selber und planetares Material zu vaporisieren und dabei eine Dampf/Gas - säule zu erzeugen, die sich schneller ausbreiten muss, als die Fluchtgeschwindigkeit des Planeten. Zu diesem Prozess gibt es Modelle und Messungen, die zeigen, dass die Massen-gemittelte Ausdehnungsgeschwindigkeit einer solchen Säule als

$$\bar{v}_p = \sqrt{2(E - H_{\text{vap}})}$$

⁴Siehe Abschnitte 3.3.3 und 3.3.4 für eine Erklärung des Dynamos.

geschrieben werden kann, wo E die spezifische Energie des vaporisierten Projektils und Targetmaterials und H_{vap} die spezifische Verdampfungswärme sind. Typische Werte sind $H_{\text{vap}} \approx 13$ MJ/kg für Silikate und 3 MJ/kg für Wassereis. Ein Impakt kann vereinfacht als zweidimensional angenommen werden. Dabei bildet sich eine Stoßfront, die in das Projektil und in das Ziel eindringt. Aus Energieerhaltungsgründen

$$E/m - E_0/m = \frac{u^2}{2},$$

wo E/m und E_0/m die spezifische Energie hinter der Stoßfront und vor dem Stoß sind. u ist die Geschwindigkeit eines vaporisierten Teilchens. Nach einigen Rechnungen, die durch die Transformation von Ruhesystem in Projektilsystem und ins Stoßwellensystem kompliziert werden, erhielten *Melosh* und *Vickery* (1989) den folgenden Ausdruck für die minimale Geschwindigkeit, die ein Impaktor haben muss, um die darüberliegende Atmosphäre in den Weltraum zu befördern

$$v_{\text{min}} = \sqrt{8 \left(\frac{v_{\text{esc}}^2}{2} + H_{\text{vap}} \right)}. \quad (2.61)$$

Diese Geschwindigkeit liegt für Mars bei 14.3 km/s für einen Asteroiden aus Silikat, deutlich kleiner als die durchschnittliche Relativgeschwindigkeit zwischen Asteroiden und Mars.

Der zweite Faktor, der entscheidet, ob der Impaktor Atmosphäre entfernen kann, ist dass die Masse des vaporisierten Projektils und Kratermaterials größer sein muss, als die darüberliegende Luftmasse. Dabei ist mit darüberliegende Luftmasse diejenige gemeint, die über einer Tangentialebene zum Impakt liegt. Diese beträgt ungefähr

$$m_{\text{min}} \approx \frac{2\pi P_0 H R}{g},$$

wo P_0 der Luftdruck vor dem Stoß ist, H die Skalenhöhe, R der Planetenradius und g die Gravitationsbeschleunigung. Die minimale Masse für Mars beträgt ca. 4×10^{13} kg, was einem Asteroiden von ca. 3 km Ausdehnung entspricht.

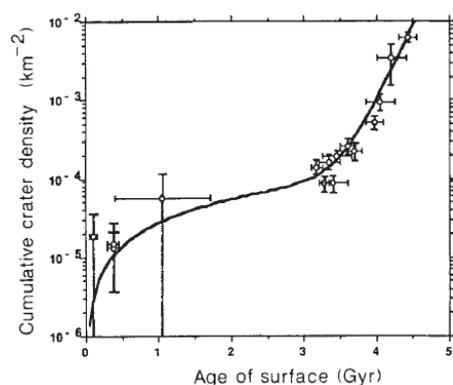


Abbildung 2.21: Kraterdichte auf dem Mond gegen vergangene Zeit. Aus *Melosh* und *Vickery* (1989).

Nun zeigen Messungen der Kraterdichten auf Mars und Mond, dass vor ca. 3800 - 4100 Millionen Jahren sehr wahrscheinlich eine Periode mit besonders starker Einschlagsaktivität gegeben hat. Abb. 2.21 zeigt die Kraterdichte auf dem Mond gegen vergangene Zeit und illustriert diesen Sachverhalt. Wie ist es aber dazu gekommen? Warum gab es eine solche Periode? Dies scheint mit einer Phase von Migration der Riesenplaneten zusammenzuhängen, die dabei einen Aste-

roidengürtel nahezu völlig entleert haben. Ein großer Teil der Asteroiden dieses Gürtels hat auch die inneren Planeten getroffen. Abb. 2.22 gibt eine schöne graphische Darstellung davon.

graphische Darstellung davon.

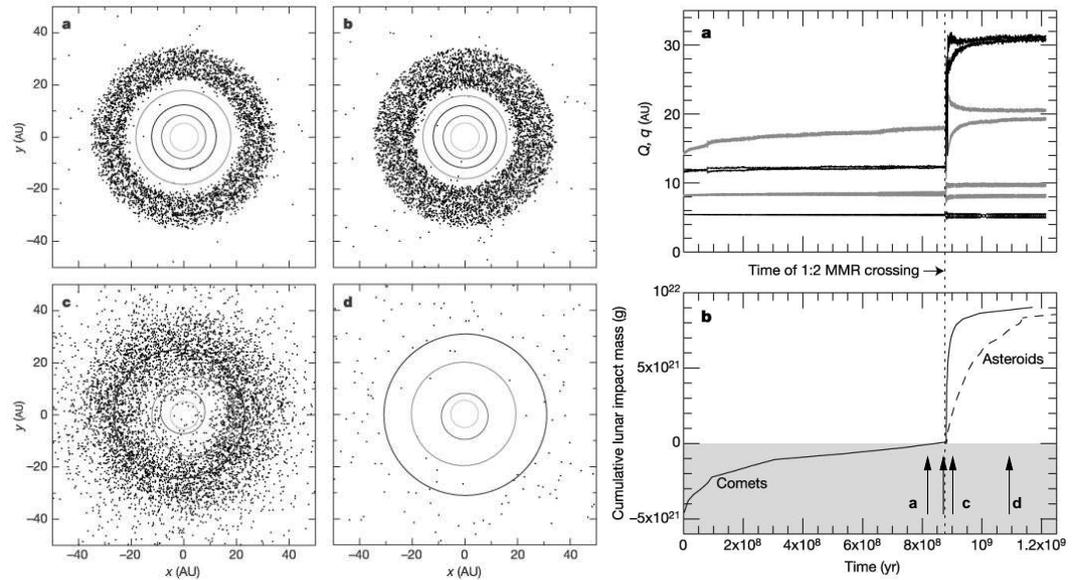


Abbildung 2.22: Erklärung für die Phase des Late Heavy Bombardment nach *Gomes et al.* (2005). Links: Die Umlaufbahnen der Riesenplaneten am Anfang der planetaren Wanderung. b) Gerade vor dem Beginn des LHB, c) unmittelbar nach Beginn des LHB und d) 200 MJahre später, wenn die Riesenplaneten ihre endgültigen Bahnen eingenommen haben. Nur ca. 3% der ursprünglichen Masse des Asteroidengürtels ist übriggeblieben. Rechts oben: Zeitliche Entwicklung von Aphel Q und Perihel q der Riesenplaneten. Rechts unten: Massenakkretierung des Mondes (unteres Panel). Die vier Zeitpunkte der linken Hälfte dieser Abbildung sind mit Pfeilen markiert. Quelle: *Gomes et al.* (2005).

Zusammenfassend können wir sagen, dass eine Phase des “Late Heavy Bombardment” sehr wahrscheinlich für die Entstehung, Bildung und Entwicklung von Atmosphären eine entscheidende Rolle hatte.

Kapitel 3

Die solare Atmosphäre und Korona

3.1 Aufbau der Sonnenatmosphäre

Die Atmosphäre der Sonne wird oft unterteilt in Photosphäre, Chromosphäre, Übergangsregion und Korona. Die Photosphäre ist die Schicht, aus der die effektive Temperatur T_{eff} der Sonne zu uns gelangt, also in einer optischen Tiefe von $\tau = 3/2$, siehe Abschnitt 2.1.6, bzw. Seite 30. Der Photosphäre entspricht die sichtbare Sonnenscheibe. Die nächsthöher gelegene Schicht ist die Chromosphäre, eine kühle Schicht, die Ihren Namen vom haarfeinen farbigen Kranz um die Sonne bei einer Sonnenfinsternis hat. Sie wird durch die Übergangsregion von der sehr heißen Korona getrennt. Während Beobachtungen der Photosphäre in sichtbaren Wellenlängen sinnvoll sind, ist dies für die Korona nicht möglich. Sie ist so heiß, dass sie im Ultravioletten und im Röntgenlicht besonders gut sichtbar ist.

Übung 3.1 *Warum ist die Beobachtung der Photosphäre im Sichtbaren sinnvoll?*

Wir besprechen hier übersichtsartig die verschiedenen Bestandteile der Sonnenatmosphäre und gehen anschließend im Detail auf die Korona ein.

Abbildung 3.1 zeigt das solare Spektrum (hier das Referenzspektrum der American Society for Testing Materials) sowohl außerhalb der Atmosphäre (schwarz) wie auch am Erdboden (blau, hier bei 37° Nord, also in den USA). Das Spektrum wird über weite Bereiche gut durch ein Schwarzkörperspektrum beschrieben. Die Ausnahmen finden sich bei kurzen Wellenlängen, im UV-, Röntgen- und Gammabereich. Hier bricht die thermische Näherung zusammen, wir beobachten hier auch nicht mehr Licht der Photosphäre sondern Licht der heißen Korona. Das Spektrum am Erdboden zeigt etliche Absorptionsbanden, vorallem im IR-Bereich, aber auch, dass UV die irdische Atmosphäre nicht durchdringt. Deshalb müssen Beobachtungen der Korona aus dem Weltraum erfolgen.

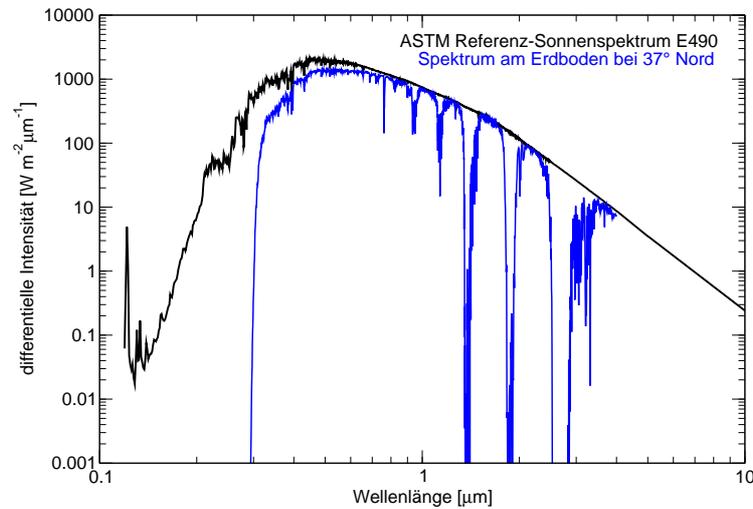


Abbildung 3.1: Referenzspektrum der Sonne außerhalb der irdischen Atmosphäre (schwarz) und am Erdboden bei 37° Nord (blau).

3.1.1 Photosphäre

Es ist offensichtlich, dass die äußere konvektive Zone der Sonne eine äußere Grenze aufweisen muss. Beobachtungen der Sonne in sichtbarem Licht zeigen Muster, die stark an die Oberfläche von kochendem Wasser in einer Pfanne erinnern. Abbildung 3.8 zeigt eine hochauflösende Aufnahme der solaren Oberfläche bei 430 nm. Das Bild zeigt helle Strukturen (Granulen genannt), die durch dunkle sog. inter-granularen Gassen (inter-granular lanes) getrennt werden. Während solche oder ähnliche Strukturen bei guten Sichtbedingungen beobachtet werden können, konnten frühe photographische Aufnahmen diese feinen Details der Sonnenoberfläche nicht festhalten. *Leighton* (1963), welcher die solare Granulation in den 1960-er Jahren intensiv studiert hat, schreibt "Until rather recently, the only photograph which clearly showed a reticulated pattern was that by Janssen, taken in 1885". Heute erlauben ballon- und weltraumbasierten Teleskope detaillierte Studien der solaren Granulation. Die Schwierigkeit der frühen photographischen Untersuchungen war, so stellte sich heraus, die starke zeitliche Variabilität, die sich über die Dauer einer frühen Aufnahme ausgemittelt hat.

Die mittlere Größe dieser Granulen ist ca. 1.5 Mm, die Größen zeigen aber eine große Variation um diesen Mittelwert. Die intuitiv einleuchtende Interpretation der Granulation als eine Folge konvektiver Bewegungen (ähnlich der Oberfläche von kochendem Wasser) hat sich bald als richtig erwiesen, allerdings mit vielen Korrekturen und Unsicherheiten. Um z. B. zu zeigen, dass sich in der Granulation Material nach oben und unten bewegt, müssen Spektren aufgenommen werden. Abb. 3.3 zeigt ein solches Beispiel. Von einer zentralen Region der Sonnenscheibe wurden alle 15 Sekunden Spektren aufgenommen. Die Abb. zeigt rechts das Kontext-Bild und links die Spektren, die die Variabilität der Linien von TiII bei 491 nm, FeII bei 491,13 nm, FeI bei 491,78

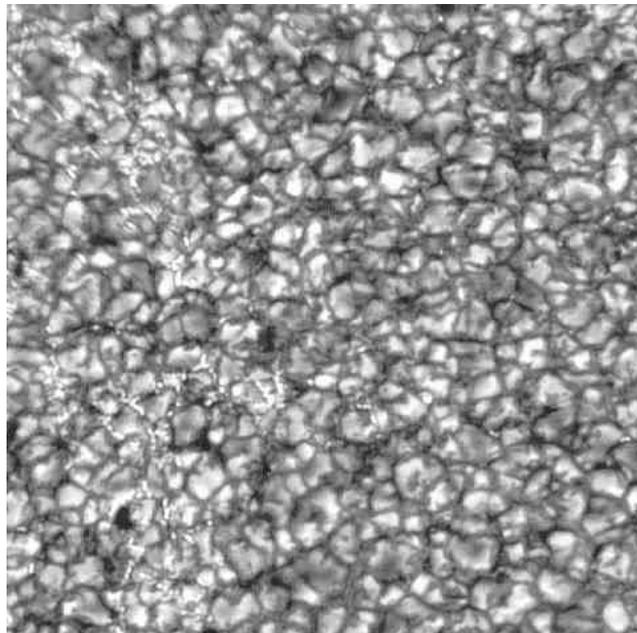


Abbildung 3.2: Hochaufgelöste Aufnahme der solaren Granulation um 430 nm. Das Bild zeigt Granulen in verschiedenen Evolutionsstadien. Etliche Granulen haben dunkle (kühle) Zentren, ein Vorläufer für ihr Auseinanderbrechen, während sich andere gerade aufspalten. Die kleinen, hellen Punkte zwischen den Granulen sind mit magnetischen Strukturen verknüpft. Aufnahme: Göran Scharmer mit dem Schwedischen Vakuum-Sonnenteleskop auf La Palma.

nm und Ni bei 491,20 nm sichtbar machen. Die Verschiebungen sind eine Folge des Dopplereffektes der Auf- und Abbewegung über die Länge des Schlitzes. Abbildung 3.4 zeigt die zugehörigen Geschwindigkeiten der Granulation v_{conv} entlang des Spektrographenschlitzes von Abb. 3.3. Die großen Geschwindigkeitsunterschiede innerhalb von 0,7 Bogensekunden (immerhin das Fünffache der Auflösung, entsprechend einer Länge von ca. 500 km) können zu Scherungs-induzierter Turbulenz führen. Die Gebiete dazwischen zeigen eine Aufwärtsbewegung in den Granulen und eine Abwärtsbewegung in den intergranulären Gassen. Die konvektiven Muster der Photosphäre sind nicht eine Fortschreibung dieser Bewegungen innerhalb der konvektiven Zone. Wie wir in Absch. 2.1.1 gesehen haben, ist es möglich, dass sich ein Paket solares Material durch das Umgebungsmaterial nach oben bewegt, wenn es Schwarzschild-instabil ist. Genau dies scheint mit dem Material der obersten ca. 2000 km unterhalb der Sonnenoberfläche ($\tau = 2/3$) zu geschehen. Die Instabilität wird hier durch einen anderen Effekt ausgelöst, als in Absch. 2.1.1 beschrieben. Die große Opazität führt zu einem starken Temperaturgradienten. Dadurch rekombiniert ionisierter Wasserstoff mit den mitfließenden Elektronen (das Plasma ist elektrisch neutral). Dadurch erhöht sich die Temperatur des sich aufwärtsbewegenden Paketes und es wird weniger dicht und damit die Bewegung instabil gegen Konvektion. In einem Paket, welches sich abwärts bewegt, wird der Wasserstoff ionisiert, was zu einer Abkühlung und einer Zunahme der Dichte führt, womit die Konvektion noch verstärkt wird (*Leighton*, 1963). Diese Effekte führen zusammen zu einer konvektiven Bewegung, welche sich als solare Granulation ausdrückt, in vielfacher Hinsicht ähnlich den Bénard'schen Konvektionszellen in einer Flüssigkeit. Granulation tritt nicht nur bei der Sonne, sondern mit hoher Wahrscheinlichkeit auch bei anderen Sternen auf, die eine Mischung von Strahlungs- und konvektivem Energietransport in ihren äußeren Schichten haben.

Offensichtlich muss sich das nach oben bewegende Material ab einem gewissen Punkt seitwärts bewegen und erhält so eine horizontale Geschwindigkeitskomponente. Dies bedingt aber einen Druckgradienten, der sich von der Mitte der Granule aus aufbaut und das Material nach außen zu den Rändern hin treibt, in die intergranulären Gassen, wo es wieder abgebremst wird. Dieser Druck muss aber auch das nach oben fließende Material abbremsen und das nach unten fließende beschleunigen, folglich muss die Abwärtsbewegung schneller sein, als die Aufwärtsbewegung. Wegen Massenerhaltung müssen also die abwärts-fließenden intergranulären Gassen schmaler sein (eine kleinere Fläche aufweisen) als die aufwärtsfließenden Granulen. Dieser Druck im Zentrum der Granulen führt zu einer Abbremsung des nach oben fließenden Materials, welches folglich mehr Zeit hat, abzukühlen als noch weiter unten. Mit der Abkühlung geht eine Reduktion der Opazität um bis zu zwei Größenordnungen (*Stix*, 2002) einher (als Folge der Rekombination von Wasserstoff). Diese reduzierte Opazität erlaubt eine effektivere Kühlung und verringert den Auftrieb durch den Strahlungsdruck, was die Aufwärtsbewegung rasch abbremst. Mit der Zeit führt das sich so aufbauende zentrale Druckmaximum zu einer Desin-

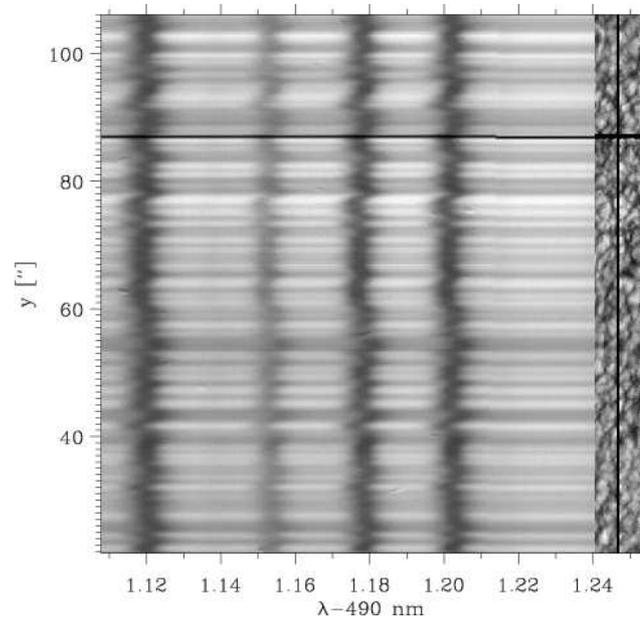


Abbildung 3.3: Linke Seite: Teil eines Spektrogramms im Wellenlängenintervall $491,11\text{nm} < \lambda < 491,24\text{ nm}$. Rechte Seite: Kontext-Bild mit einem Abbild des Schlitzes entlang der Vertikalen. Der horizontal Strich dient der Kalibration. Aus *Nesis et al.* (2001).

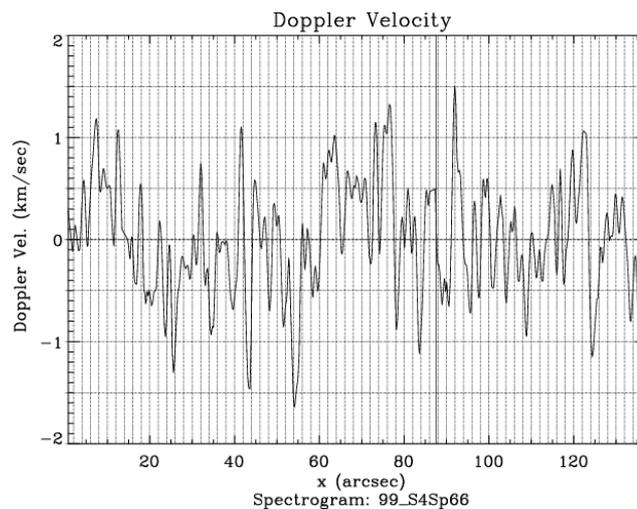


Abbildung 3.4: Variationen in der Doppler-Geschwindigkeit bei Granulen entlang des Spektrographenschlitzes hergeleitet aus der Abweichung der NaI Absorptionslinie von ihrem Ruhewert. Aus *Nesis et al.* (2001).

tegration der Granule, was manchmal besonders spektakulär als explodierende Granule sichtbar wird, siehe Abb. 3.5. Dieser Effekt begrenzt die Größen und Lebensdauern von Granulen.

Die Eigenschaften der Granulation sind in Abb. 3.8 zusammengefasst. Neben der Granulation gibt es auch die Mesogranulation (nicht gezeigt) und die Supergranulation, die der Granulation überlagert sind. Eine der Schwierigkeiten der Beobachtung der Granulation liegt darin, dass Ihr auch noch eine 5-Minuten Oszillation überlagert ist.

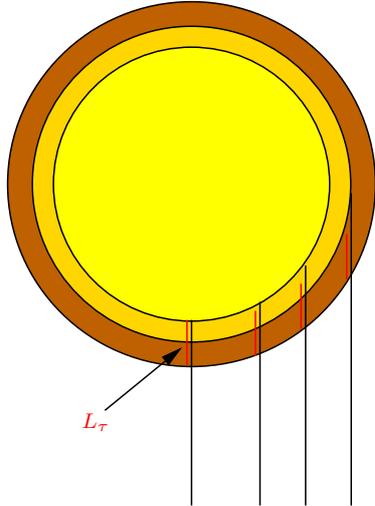
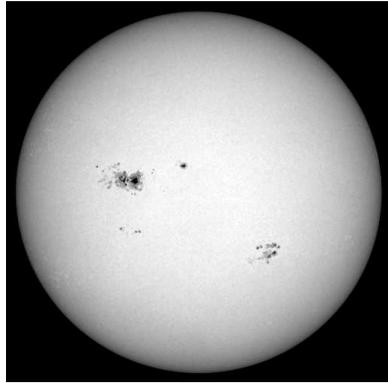


Abbildung 3.9: Erklärung der Randverdunkelung. Gegen den Rand eines Sternes hin wird der Weg zu gleich heißen Regionen der Photosphäre länger als eine optische Tiefe. Nimmt die Temperatur gegen außen ab, so erscheint der Rand verdunkelt. Das obere Bild stammt von SOHO/MDI.

Das Temperaturprofil der Photosphäre kann über die Randverdunkelung (engl. limb darkening) der Sonnenscheibe abgeschätzt werden. Abbildung 3.9 erklärt den Effekt. Die Intensität, die ein Beobachter an einer Stelle auf der Sonnenscheibe sieht, ist ungefähr die Summe aller Intensitäten bis zu einer optischen Tiefe. Nimmt die Temperatur der Photosphäre nach außen ab, so sieht er zum Rand hin eine kleinere Intensität, der Rand erscheint verdunkelt. Aus der Atmosphäre entweicht die Intensität

$$I_{\lambda}(\tau = 0, \mu) = \frac{1}{\mu} \int_0^{\infty} S_{\lambda}(\tau_{\lambda}) \exp\left(\frac{-\tau_{\lambda}}{\mu}\right) d\tau_{\lambda}, \quad (3.1)$$

wo $\mu = \cos \vartheta$. Unter der Annahme des lokalen thermischen Gleichgewichts (LTE) erhalten wir das Profil der Randverdunkelung durch Division dieses Ausdrucks durch die Intensität in der Scheibenmitte, bei $\mu = 1$,

$$\Phi_{\lambda}(\mu) = \frac{I_{\lambda}(0, \mu)}{I_{\lambda}(0, 1)} = \frac{1}{\mu} \int_0^{\infty} \frac{B_{\lambda}(\tau_{\lambda})}{I_{\lambda}(0, 1)} \exp\left(\frac{-\tau_{\lambda}}{\mu}\right) d\tau_{\lambda}. \quad (3.2)$$

Nun kann die normierte Quellfunktion in eine Potenzreihe von τ_{λ} entwickelt werden,

$$\frac{B_{\lambda}(\tau_{\lambda})}{I_{\lambda}(0, 1)} = a_{\lambda} + b_{\lambda}\tau_{\lambda} + c_{\lambda}\tau_{\lambda}^2 + \dots \quad (3.3)$$

und in Glg. 3.2 eingesetzt werden. Dies ergibt eine Reihenentwicklung in μ , wie man durch partielle Integration und vollständiger Induktion leicht zeigen kann,

$$\Phi_{\lambda}(\mu) = a_{\lambda} + b_{\lambda}\mu + c_{\lambda}\mu^2 + \dots \quad (3.4)$$

Die Parameter a_{λ} , b_{λ} , ... kann man an monochromatische Messungen anpassen und erhält über Glg. 3.3 das Temperaturprofil der Photosphäre in Abhängigkeit der optischen Tiefe.

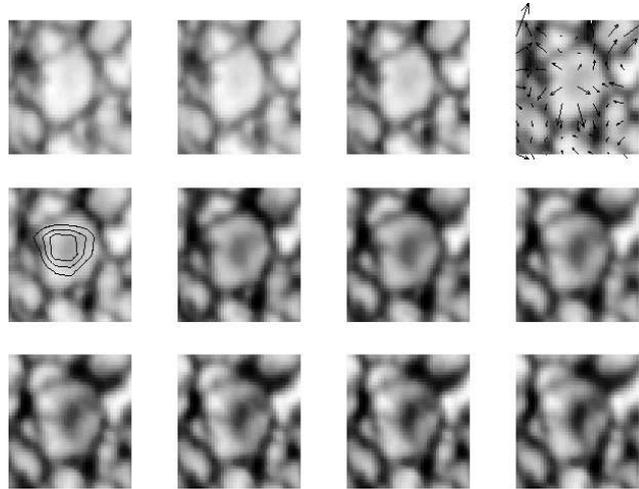


Abbildung 3.5: Zeitliche Abfolge einer explodierenden Granule mit dem entsprechenden Geschwindigkeits- bzw. Divergenzfeld. Jede Aufnahme ist $5,6''$ breit, die Aufnahmen liegen 20 Sekunden auseinander. Von *Rieutord et al.* (2000).

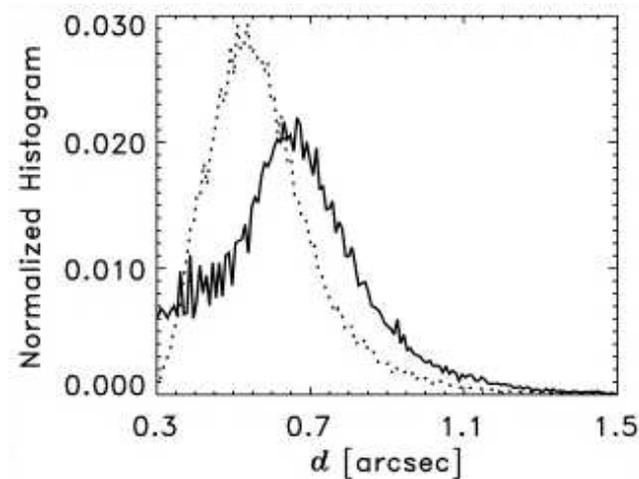


Abbildung 3.6: Normalisierte Histogramme der Durchmesser der Helligkeitsmaxima der Granulen (durchgezogene Linie, unter Annahme kreisförmiger Form) und der Helligkeitsminima dazwischen (gepunktete Linie). Von *Hirzberger et al.* (1997).

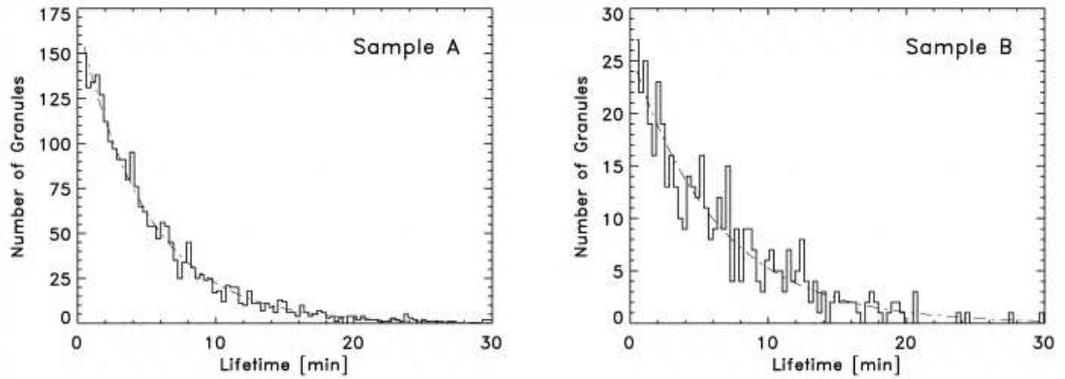


Abbildung 3.7: Histogramme der Lebensdauern der 2643 automatisch verfolgten Granulen (Probe A; links) und der 481 manuell verfolgten Granulen (Probe B; rechts). Die gestrichelpunktete Linien zeigen Exponentialkurven, die an 2 bis 96 Bilder angepasst worden sind. Sie gelten für eine Lebensdauer $T \leq 30$ Minuten. Von *Hirzberger et al.* (1997).

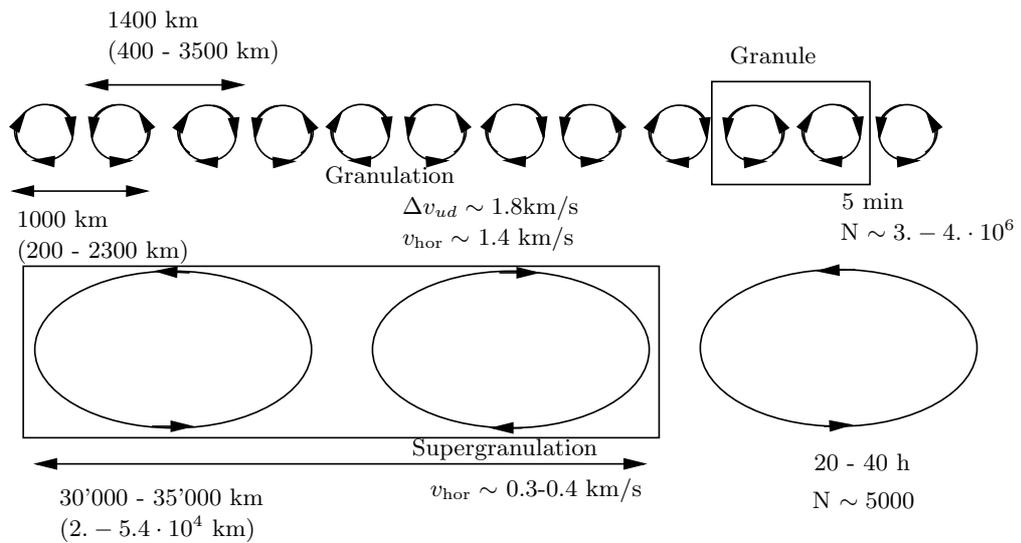


Abbildung 3.8: Eigenschaften der Granulation und Supergranulation. Nach *Foukal* (2004).

3.1.2 Chromosphäre und Übergangsschicht

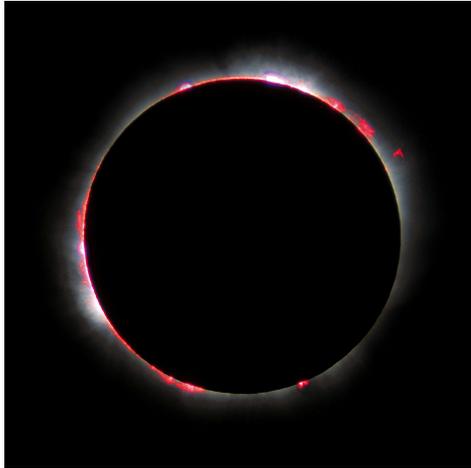


Abbildung 3.10: Diese Aufnahme der Sonnenfinsternis von 1999 in Frankreich zeigt die Chromosphäre als leuchtenden roten “Ring” um die verdunkelte Sonne. Aufnahme: Luc Viatour

Die Chromosphäre (die “Farb-Sphäre”) schließt unmittelbar an die Photosphäre an. Diese ca. 10'000 km dünne Schicht erscheint bei einer Sonnenfinsternis kurz als roter Ring um die verdunkelte Scheibe sichtbar. Die rote Farbe kommt vom Ly- α Übergang des häufigsten Elementes, Wasserstoff. Damit ist bereits klar, dass die Chromosphäre eine kühle Schicht der Sonne ist. Abbildung 3.11 zeigt die Temperaturschichtung in der Chromosphäre und unteren Übergangsregion (transition region) für verschiedene Modelle. Die Temperatur variiert von 16'400 K bis zu 5200 K in der Konvektionszone (unterhalb von $z = 0$ km) und nimmt in der Chromosphäre auf etwa 3000 K und bis zu 1800 K in kalten Stellen ab. Die sehr inhomogene Heizung wird im Modell von *Wedemeyer et al.* (2004) durch akkustische Wellen,

die als Stoßwellen dissipieren, erreicht. Die Temperatur in der Chromosphäre nimmt nach Erreichen eines Minimums mit der Höhe zu und erreicht dann bei typisch knapp über 2000 km einen Punkt, an dem sie schlagartig auf sehr hohe Werte steigt (siehe Abb. 3.13). Hier muss ein anderer Heizmechanismus einsetzen und wir verlassen die Chromosphäre und betreten die Korona.

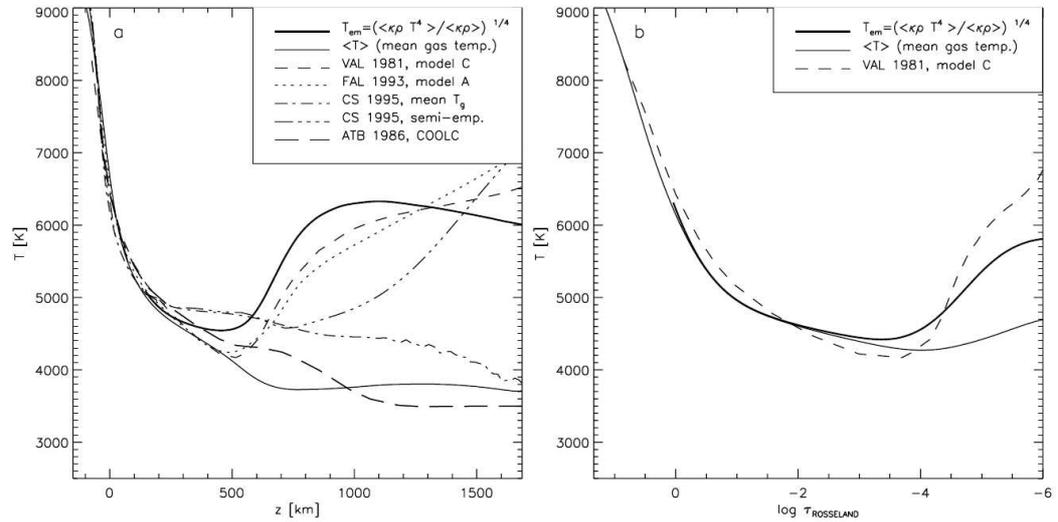


Abbildung 3.11: Temperaturschichtung für verschiedene Modelle der Chromosphäre und Übergangsregion als Funktion der geometrischen Höhe (a) und der optischen Tiefe (b). Quelle: *Wedemeyer et al.* (2004).

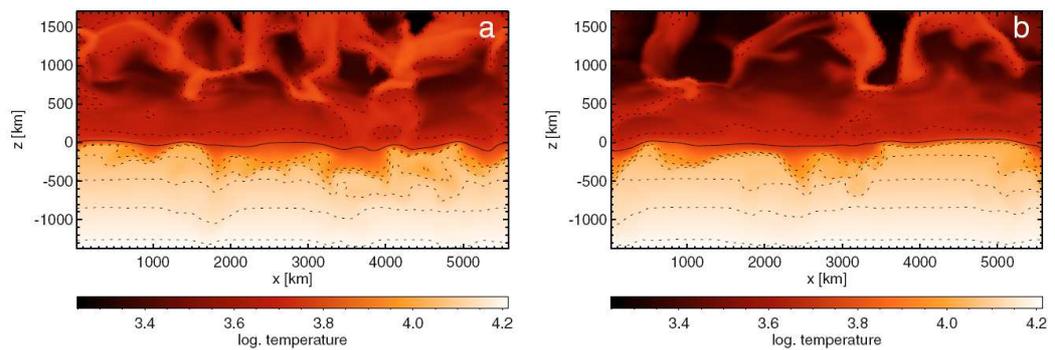


Abbildung 3.12: Temperaturen an zwei verschiedenen y -Positionen in der Chromosphäre zeigen deren äußerst inhomogene Struktur. Die ausgezogene Linie zeigt die optische Tiefe Eins an ($\tau = 1$), die gepunkteten Linien sind Isothermen für (von oben nach unten) $\log T = 3.7, 3.95, 4.00, 4.05, \dots, 4.20$. Quelle: *Wedemeyer et al.* (2004).

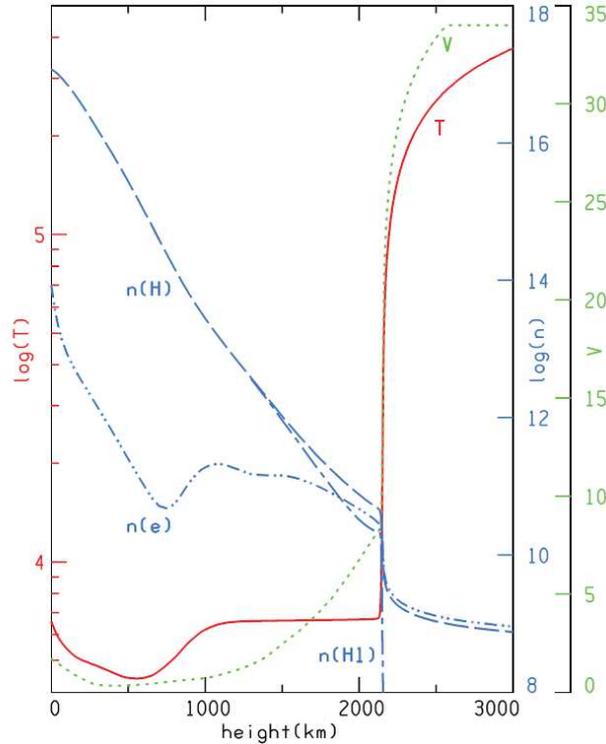


Abbildung 3.13: Temperatur-, Dichte- und Geschwindigkeitsprofile für Modell C von *Avrett und Loeser (2008)*. Nach einer möglichen akustischen Heizung der Chromosphäre muss bei dieser Übergangsschicht ein anderer Heizmechanismus einsetzen.

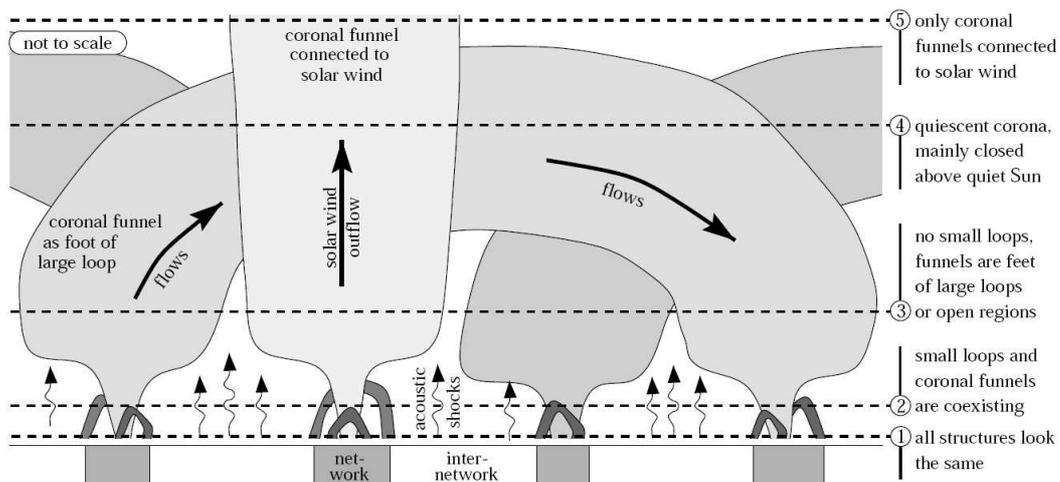


Abbildung 3.14: Modell für die Übergangsregion nach *Peter (2001)*.

3.2 Die Korona

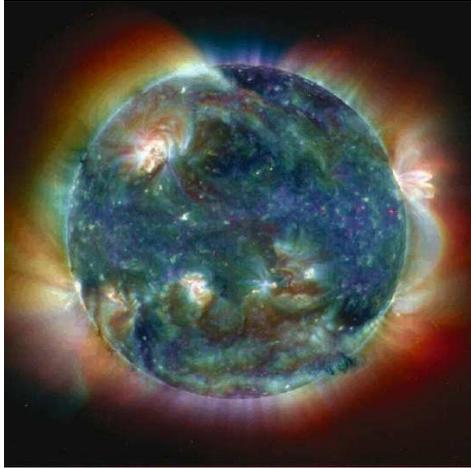


Abbildung 3.15: Falschfarbenaufnahme der Korona in mehreren Wellenlängenbereichen im extremen Ultraviolett: rot zeigt Temperaturen von ca. 2 MK, grün von ca. 1.5 MK und blau von etwa 1 MK. Die hellen Flecken sind aktive Regionen, rechts am Rand der Sonne eine Prominenz. Quelle: EIT/SOHO

Man sieht Linien, Schleifen, Flecken und sogar Farbübergänge, am deutlichsten eine Rötung gegen außen. Dies bedeutet nicht unbedingt, dass die Korona nach außen heißer wird, sondern lediglich, dass die heißen und kalten Schleifen nicht gleich gewichtet sind. Abschnitt 3.2.2 wird uns zeigen, wie man diesen Effekt bei der Datenanalyse berücksichtigen kann.

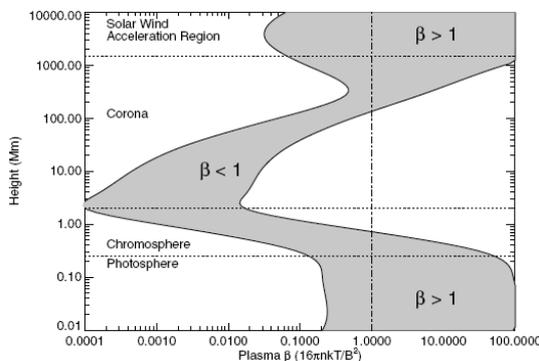


Abbildung 3.17: Das Verhältnis von thermischem zu magnetischem Druck, das Plasma- β , erstreckt sich in der Korona über einen weiten Bereich. Aus *Aschwanden* (2004).

Die solare Korona ist bei einer Sonnenfinsternis auch von bloßem Auge sichtbar. Abbildung 3.16 zeigt zwei Aufnahmen bei verschiedenen solaren Aktivitäten. Links ein Bild aus 2001 nahe des solaren Aktivitätsmaximums, rechts eine Aufnahme aus 1998, kurz nach dem Aktivitätsminimum von 1996/1997. Die Struktur der Korona hat sich in dieser Zeit erheblich verändert, wir werden später sehen warum und wie.

Die Korona ist thermisch stark strukturiert. Abbildung 3.15 zeigt eine Falschfarbenaufnahme der Korona im extremen Ultraviolett. Der roten Farbe entsprechen Temperaturen um 2 MK, grün ca. 1.5 MK und blau ca. 1 MK. Die hellen weißen Flecken weisen ein Gemisch aller Temperaturen auf (Newtonsche Farbmischung), ebenso die Prominenz am rechten Rand der Sonne. Am Nordpol ist ein koronales Loch blau, also kühl sichtbar. Es fällt auch auf, wie stark strukturiert die verschiedenen Regionen sind.

Die Korona ist ein magnetisches Plasma. Das starke Magnetfeld der Sonne beeinflusst in weiten Teilen der Korona deren Verhalten. Aus der Plasmaphysik wissen wir, dass der relevante Parameter hierfür das "Plasma-Beta" ist, das Verhältnis von thermischem zu magnetischem Druck.

$$\beta = \frac{p_{\text{thermisch}}}{p_{\text{magnetisch}}} = \frac{nkT}{B^2/2\mu_0}. \quad (3.5)$$

Abbildung 3.17 zeigt die Verhältnisse in der Korona, ja in der gan-



Abbildung 3.16: Die solare Korona ist während einer totalen Sonnenfinsternis selbst von Auge gut sichtbar. Die beiden Aufnahmen sind allerdings aus verschiedenen Aufnahmen zusammengesetzt um den erforderlichen dynamischen Bereich abzudecken. Quelle: links Espenak, rechts Gada.

zen Atmosphäre der Sonne. Während die Photosphäre durch das Plasma bestimmt wird (photosphärische Bewegungen beeinflussen den Rest der Sonnenatmosphäre), sinkt dessen Einfluss in der Chromosphäre und erreicht erst wieder in der Beschleunigungsregion des Sonnenwindes und im Sonnenwind eine vergleichbare Bedeutung.

3.2.1 Ionisationszustand der Korona

Die Boltzmann-Gleichung liefert uns den Besetzungszustand für angeregte Zustände eines Atoms bei einer Temperatur T ,

$$N_i = \frac{g_i}{g_0} N_0 \exp\left(-\frac{E_i}{kT}\right), \quad (3.6)$$

wo E_i die Anregungsenergie für den Zustand i sei, N_0 die Anzahl Moleküle oder Atome im Grundzustand und g_i das statistische Gewicht¹ des Zustandes i . Damit ist die relative Besetzung der Zustände i und j

$$\frac{N_j}{g_j} = \frac{N_i}{g_i} \exp\left(-\frac{E_j - E_i}{kT}\right). \quad (3.7)$$

In einem Plasma mit Elektronen, die oft eine Energie aufweisen, die größer ist, als die Ionisationsenergien eines Atoms oder Ions, können wir die relative Besetzung von Zuständen analog schreiben

$$\frac{N_i}{N_0} = \frac{g_i}{g_0} \exp\left(-\frac{E_i + \frac{1}{2}m_e v_e^2}{kT}\right), \quad (3.8)$$

¹Das statistische Gewicht $g = 2J + 1$ kann auch als Entartungsgrad des energetisch entarteten Zustandes mit Gesamtdrehimpuls J bezeichnet werden.

wo das statistische Gewicht $g_i = g'_i \cdot g_e$ nun aus dem statistischen Gewicht des Grundzustandes g'_i des ionisierten Atomes und dem g_e der freien Elektronen besteht. In anderen Worten, muss das statistische Gewicht des Ions im Grundzustand und das seines nun freien Elektrons berücksichtigt werden. Das statistische Gewicht eines freien Elektrons ist proportional zu seinem Volumen im Phasenraum. Aus der Thermodynamik wissen wir, dass dieses gegeben ist durch

$$(2\pi m k T)^{3/2}.$$

Im Ortsraum hat ein einzelnes Elektron bei einer Elektronendichte n_e das Volumen $V_e = 1/n_e$. Nun kann jedes Elektron auch zwei Spinrichtungen haben und wir finden das statistische Gewicht des Elektrons als

$$g_e = 2 \frac{(2\pi m_e k T)^{3/2}}{n_e h^3}. \quad (3.9)$$

Einsetzen in die Boltzmann-Gleichung (Glg. 3.6) liefert sog. *Saha-Gleichung*

$$\frac{N_i}{N_0} = \frac{2}{n_e} \frac{(2\pi m_e k T)^{3/2}}{h^3} \frac{g'_i}{g_0} \exp\left(-\frac{E_i}{kT}\right) \quad (3.10)$$

für die Besetzungszahl relativ zum Grundzustand des Ions².

Ganz analog gilt für den Übergang von einem Ionisationszustand k zum $k + 1$ -ten

$$\frac{N_{k+1}}{N_k} = \frac{2}{n_e} \frac{(2\pi m_e k T)^{3/2}}{h^3} \frac{g'_{k+1}}{g_k} \exp\left(-\frac{(E_{k+1} - E_k)}{kT}\right). \quad (3.11)$$

3.2.2 Messungen koronaler Eigenschaften

Emissionslinienspektroskopie

Mit der Emissionslinienspektroskopie können wir die Vielzahl von Übergangslinien in der Korona ausnutzen um das Plasma der Korona zu untersuchen. Tausende von Linien, vorallem im EUV und weichen Röntgenlicht tragen dazu bei. Diese Arbeit kann nicht "von Hand" bewältigt werden, sondern wird mit modernen Datenbanken wie CHIANTI geleistet. Diese enthalten alle relevanten Daten um Linienintensitäten in der Korona zu berechnen. Die Intensität einer Linie $I(\lambda_{ij})$ einer optisch dünnen Spektrallinie λ_{ij} ist gegeben durch

$$I(\lambda_{ij}) = \frac{h\nu_{ij}}{4\pi} \int N_j(X^{+m}) A_{ji} dz, \quad (3.12)$$

wo A_{ji} der Einstein-Koeffizient für die Wahrscheinlichkeit des spontanen Übergangs und z die Länge der Sichtlinie entlang der Quelle ist. Dabei ist $N_j(X^{+m})$

²Das ist nicht der Grundzustand des neutralen Atoms!

die Anzahldichte des Niveaus j des emittierenden Ions. Diese wird oft als eine Reihe von Verhältnissen ausgedrückt:

$$N_j(X^{+m}) = \frac{N_j(X^{+m})}{N(X^{+m})} \frac{N(X^{+m})}{N(X)} \frac{N(X)}{N(H)} \frac{N(H)}{n_e} n_e, \quad (3.13)$$

wo $N(X^{+m})/N(X)$ den Ionisationsgrad des Ions X^{+m} relativ zur totalen Anzahldichte des Elementes X bedeutet. Dieser muss aus der Elektronentemperatur und allenfalls deren Verteilungsfunktion berechnet werden. Dazu kann der CHIANTI-Code verwendet werden, welcher die Ionisations- und Rekombinationsraten von *Arnaud und Raymond* (1992); *Mazzotta et al.* (1998) verwendet. $N(X)/N(H)$ ist die Elementhäufigkeit relativ zu Wasserstoff und $N(H)/n_e \approx 0.83$ ist das Verhältnis der Wasserstoff-Anzahldichte zur Elektronen-Anzahldichte (unter der Annahme $N(\text{He})/N(H) = 0.1$, was nicht überall in der Korona stimmt). In der Korona nimmt man an, dass die stoßinduzierten Übergänge wesentlich schneller sind als die Ionisations- und Rekombinations-Zeitskalen und deshalb $N_j(X^{+m})A_{ji} \propto n_e$ gilt. Diese Näherung wird oft koronale Näherung genannt.

Es hat sich eingebürgert, alle atomaren Beiträge in der sog. Beitragsfunktion zusammenzufassen,

$$C(T, \lambda_{ij}, n_e) = \frac{h\nu_{ij} A_{ji} N_j(X^{+m})}{4\pi n_e N(X^{+m})} \frac{N(X^{+m})}{N(X)}. \quad (3.14)$$

Einsetzen der Anzahldichte des Niveaus j (Glg. 3.13) in den Ausdruck für die Linienintensität (Glg. 3.12) liefert dann

$$I(\lambda_{ij}) = A_X \int C(T, \lambda_{ij}, n_e) n_e n_H dz, \quad (3.15)$$

wo wir die Elementhäufigkeit $A_X = N(X)/N(H)$ vor das Integral gezogen haben. Dies ist nicht zwingend erforderlich, sondern eine bequeme Näherung.

Übung 3.2 Wann ist diese Näherung sinnvoll?

Differential Emission Measure (DEM)

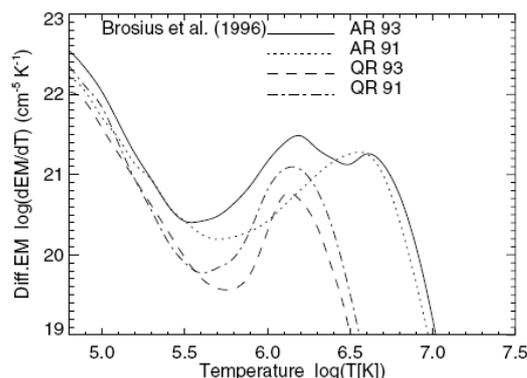


Abbildung 3.18: Differentielle Emissionsmaße für zwei aktive Regionen (AR 93 und AR 91) und zwei ruhige Regionen (QR 93 und QR 91).

Die in Abb. 3.15 gezeigte “Multi-Temperatur-Korona” kann mit Hilfe des differentiellen Emissions-Maßes (DEM) verstanden werden. Diese Größe, $dEM(T)/dT$, ist ein Maß für die Plasmamenge entlang der Sichtlinie, die im Temperaturintervall $[T, T + dT]$ zur Strahlung beiträgt. Sie ist gegeben durch das Produkt der Elektronendichte n_e mit der Wasserstoffdichte n_H entlang

des Sichtstrahls (das ist nicht ungefähr die Kolonnendichte im Quadrat!)

$$\frac{dEM(T)}{dT} \doteq \int n_e n_H(T, z) \frac{dz}{dT} \quad (3.16)$$

Abbildung 3.18 zeigt DEMs für zwei aktive und zwei ruhige Regionen (AR 91 und 93, QR 91 und 93). Dafür wurden 14 verschiedene Linien verwendet, die einen Temperaturbereich von $4.8 < \log(T) < 6.5$ (also 63'000K bis 3.2 MK) abdecken. Man sieht, dass ruhige Regionen tendenziell kühler sind (ein Maximum zwischen $6.0 < \log(T) < 6.3$). Dieser Temperaturbereich entspricht etwa dem blau-roten von Abb. 3.15. In aktiven Regionen zeigt die DEM Emission im Bereich $6.3 < \log(T) < 6.8$ ein Maximum, was zeigt, dass hier heißeres Plasma vorhanden ist. Zusammen mit Abb. 3.15 sehen wir also, dass in der Korona Regionen mit offenen Feldlinien am kühleren sind, gefolgt von den etwas heißeren ruhigen Regionen und schließlich den heißen aktiven Regionen.

Die Linienintensität aus Glg. 3.12 lässt sich dann schreiben als

$$I(\lambda_{ij}) = A_X \int_T C(T, \lambda_{ij}, n_e) \frac{dEM(T)}{dT} dT \quad (3.17)$$

und eine Analyse von Spektralliniendichten muss also drei Zutaten berücksichtigen:

- Das Dichteprofil $n(z) = n_e(z) \approx n_H(z)$ der Quelle entlang des Sichtstrahles im Temperaturintervall $[T, T+dT]$. Untersucht man z. B. eine koronale Schleife, so kann man dieses Dichteprofil oft als konstant über die Schleife und Null außerhalb betrachten (immer innerhalb des untersuchten Temperaturintervalls).
- Die Elementhäufigkeit A_X in der Quelle. Dafür werden oft Standardwerte z. B. der Photosphäre oder Korona verwendet. Gerade bei Untersuchungen von koronalen Schleifen ist diese Annahme wohl meistens nicht zutreffend.
- Atomare Parameter, die alle in der Beitragsfunktion $C(T, \lambda_{ij}, n_e)$ enthalten sind. Diese werden in modernen Codes wie CHIANTI mitgeliefert. Dabei ist zu beachten, dass hier wegen der Stoßanregung noch eine schwache Dichteabhängigkeit vorhanden ist. Diese Parameter sind also nicht reine atomare Parameter.

Bei der Analyse werden beobachtete Linienintensitäten $I(\lambda_{ij})$ mit den Elementhäufigkeiten und atomaren Parametern zu Beitragsfunktionen verrechnet. Damit wird dann das am besten zu den Daten passende DEM iterativ berechnet. Aus dieser Lösung kann dann das Produkt aus dem Quadrat der Dichte der bei $[T, T+dT]$ strahlenden Quelle mit der Länge der Quelle entlang der Sichtlinie berechnet werden. Durch Messung von Linien in verschiedenen

Wellenlängenbereichen kann so auch ein Temperaturprofil der Quelle ermittelt werden.

Übung 3.3 *Untersuchen Sie die differentiellen Emissionsmaße (DEM) von Abb. 3.18. Bei welchen Temperaturen findet man am meisten Plasma in ruhigen und aktiven Regionen? Um welchen Faktor ist das Plasma in aktiven Regionen dichter als in ruhigen wenn sie in beiden Regionen dieselbe Kolontiefe annehmen?*

3.2.3 Ionisation und Rekombination

Obwohl wir den eigentlichen Heizprozess der Korona nicht gut verstehen, so können wir doch die Auswirkungen der heißen Korona auf die Verteilung der Ladungszustände einzelner Elemente im Sonnenwind quantitativ beschreiben. Die heißen Elektronen der Korona stoßen mit Ionen und können diese weiter ionisieren oder mit ihnen rekombinieren. Zur (zeitabhängigen) Kontinuitätsgleichung (Glg. 3.103) kommen also rechts ein Quell- und ein Verlustterm hinzu. Wir schreiben die Kontinuitätsgleichung für ein prominentes Sonnenwindion, O^{6+} auf,

$$\frac{\partial n_6}{\partial t} + \vec{\nabla} (n_6 \vec{u}_6) = n_e [n_5 C_5 - n_6 (R_6 + C_6) + n_7 R_7], \quad (3.18)$$

wo n_i die Dichte des i -ten Ladungszustandes von Sauerstoff ist, C_i die Ionisationsrate aus dem Ladungszustand i heraus, R_i die Rekombinationsrate aus dem Ladungszustand i heraus. Die Änderung des Ladungszustandes ist also proportional zur Elektronendichte, hängt aber auch von der Dichte der benachbarten Ladungszustände ab. Gleichung 3.18 alleine ist also sinnlos und muss durch ein vollständiges System von Gleichungen ersetzt werden,

$$\begin{aligned} \frac{\partial n_0}{\partial t} + \vec{\nabla} (n_0 \vec{u}_0) &= n_e [-n_0 C_0 + n_1 R_1], \\ \frac{\partial n_1}{\partial t} + \vec{\nabla} (n_1 \vec{u}_1) &= n_e [n_0 C_0 - n_1 (R_1 + C_1) + n_2 R_2], \\ &\vdots = \vdots \\ \frac{\partial n_i}{\partial t} + \vec{\nabla} (n_i \vec{u}_i) &= n_e [n_{i-1} C_{i-1} - n_i (R_i + C_i) + n_{i+1} R_{i+1}], \\ &\vdots = \vdots \\ \frac{\partial n_{n-1}}{\partial t} + \vec{\nabla} (n_{n-1} \vec{u}_{n-1}) &= n_e [n_{n-2} C_{n-2} - n_{n-1} (R_{n-1} + C_{n-1}) + n_n R_n], \\ \frac{\partial n_n}{\partial t} + \vec{\nabla} (n_n \vec{u}_n) &= n_e [n_{n-1} C_{n-1} - n_n R_n]. \end{aligned} \quad (3.19)$$

Dazu kommt eine Gleichung, welche beschreibt, dass die totale Anzahl Ionen eines gewissen Elementes erhalten bleibt,

$$\sum_i^n n_i = n_{\text{tot}}. \quad (3.20)$$

Damit kann eine Gleichung aus dem System Glg. 3.19 entfernt werden. Die Ionisationsraten C_i sind stark temperaturabhängig, die Rekombinationsraten R_i wesentlich weniger. Offensichtlich hängt die Ionisationsrate eng mit dem Ionisationpotential der Ionen zusammen. Kleinere Ionisationspotentiale werden eine größere Ionisationsrate ergeben. Verschiedene Prozesse spielen bei Ionisation und Rekombination eine Rolle:

- Direkte Ionisation: Ein freies Elektron stößt mit einem Ion oder Atom und hat genügend Energie, um es (weiter) zu ionisieren. Je höher also die Energie der Elektronen, desto wichtiger wird dieser Prozess.
- Excitation-Autoionisation: Photoionisation tendiert dazu, Elektronen aus inneren Schalen zu entfernen und ein hochangeregtes Ion zu produzieren. Ein Elektron aus einer äußeren Schale muss nun die Vakanz füllen. Dabei kann es vorkommen, dass die dabei frei werdende Energie ein weiteres Elektron aus den äußeren Schalen freisetzt und sich das Ion in einem gewissen Sinne “selber” ionisiert, daher der Name “Autoionisation”.
- Radiative Rekombination: Ein Ion bindet ein freies Elektron aus dem Plasma und emittiert dabei Strahlung. Für verschiedene Ionensorten gelten hier verschiedene Wirkungsquerschnitte.
- Dielektrische Rekombination: Die mit dem rekombinierten Elektron aufgenommene Energie regt das Ion weiter an. Es kann nun entweder autoionisieren, oder aber in einer radiativen Kaskade einen energetisch günstigeren Zustand erreichen.
- Ladungstransfer-Prozesse: Ein Atom stößt mit einem Proton (oder, viel seltener, mit einem α Teilchen oder noch seltener mit einem schweren Ion) und gibt dabei ein Elektron an das Proton ab, $X^0 + p \rightarrow X^+ + H$.

Die Raten für die einzelnen Reaktionen müssen aus gemessenen Querschnitten berechnet werden. Diese sind im allgemeinen von der Energie abhängig und damit muss die Rate ein Mittel sein über die Energie-Verteilungsfunktion der freien Elektronen. Die Einheit einer Ionisations- oder Rekombinationsrate ist Volumen pro Zeit, also m^3/s . Im Erwartungswert für die Raten muss der Wirkungsquerschnitt σ vorkommen, die einfachste (und korrekte) Kombination ist

$$R \text{ oder } C = \langle \sigma \cdot v \rangle \doteq \int dv \sigma(v) v f(v). \quad (3.21)$$

Weil die Geschwindigkeit in der Regel als eine die Richtung enthaltende Größe aufgefasst wird, der Streuquerschnitt aber isotrop ist, ist es sinnvoller, die Raten als Funktion der Energie zu schreiben. Mit

$$\frac{dE}{dv} = mv \quad \text{und damit} \quad dv = \frac{dE}{mv} \quad (3.22)$$

erhalten wir für Gleichung 3.21

$$\langle \sigma \cdot v \rangle \doteq \frac{8\pi}{m^2} \int_0^\infty dE E \sigma(E) f(E), \quad (3.23)$$

wo m die Elektronenmasse und $E = \frac{1}{2}mv^2$ die kinetische Energie der Elektronen ist. $\sigma(E)$ ist der Wirkungsquerschnitt für den untersuchten Prozess. $f(E)$ ist die Verteilungsfunktion für die Elektronen. Die meisten Rechnungen für den Ionisationszustand der Korona gehen von einer Verteilung der Elektronen im thermodynamischen Gleichgewicht aus, setzen also für $f(E)$ eine Maxwellverteilung an

$$f(E) = \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{\frac{3}{2}} \exp\left(-\frac{E}{kT}\right), \quad (3.24)$$

wo T die Temperatur des Elektronenplasmas ist (und k die Boltzmannkonstante). Wenn sich das Plasma nicht im thermodynamischen Gleichgewicht befindet, müsste es durch eine andere Verteilung beschrieben werden, oft wird eine sogenannte κ -Verteilung verwendet, weil sie sich analytisch einigermaßen anständig benimmt:

$$f_{\kappa}(E) = \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} A_{\kappa} \cdot \left[1 + \frac{E}{(\kappa - 1.5) \cdot kT}\right]^{-(\kappa+1)} \quad (3.25)$$

wo A_{κ} ein Normierungsfaktor ist

$$A_{\kappa} = \frac{\Gamma(\kappa + 1)}{\Gamma(\kappa - 0.5)(\kappa - 1.5)^{3/2}}$$

und κ ein frei wählbarer Parameter ist. Für $\kappa \rightarrow \infty$ geht die κ -Verteilung in die bekannte Maxwellverteilung über, für $\kappa = 2$ resultiert die Lorentzverteilung. Der Parameter κ widerspiegelt die Stärke des Schwanzes in der Energieverteilung.

Übung 3.4 Zeigen Sie, dass f_{κ} für $\kappa \rightarrow \infty$ in eine Maxwellverteilung übergeht und für $\kappa = 2$ gleich der Lorentzverteilung ist. Stellen Sie f_{κ} für verschiedene Werte von κ graphisch dar und vergleichen Sie f_{κ} mit den beiden bekannteren Verteilungen (Maxwell und Lorentz).

Mit den notwendigen Größen, um die Wirkungsquerschnitte σ bestimmen zu können, können nun die Ladungszustandsverteilungen für verschiedene Elemente in der Korona berechnet werden. Befindet sich das Gas im stationären Gleichgewicht, so wird sich auch in der Ladungsverteilung ein Gleichgewicht einstellen. Zwischen zwei benachbarten Ladungszuständen werden aus jedem Zustand heraus gleich viele Ionen wegionisiert oder rekombiniert wie hinein, also

$$n_i C_i = n_{i+1} R_{i+1}, \quad (3.26)$$

und das interessierende Verhältnis im Gleichgewicht lautet also

$$\frac{n_i}{n_{i+1}} = \frac{R_{i+1}}{C_i}. \quad (3.27)$$

Wir bestimmen die typische Ladungsmodifikationszeit $\tau_{i \leftrightarrow i+1}$ zwischen zwei benachbarten Ladungszuständen. In

$$\frac{\partial n_i}{\partial t} = n_e (n_{i+1} R_{i+1} - n_i C_i) \quad (3.28)$$

ersetzen wir $n_{i+1} = n - n_i$. Im Gleichgewicht ist $n = \text{const.}$ und wir lösen

$$\frac{\partial n_i}{\partial t} + n_e (R_{i+1} + C_i) n_i = n n_e R_{i+1} \quad (3.29)$$

nach n_i auf. Die allgemeinste Lösung lautet

$$n_i(t) = G(t) e^{-U(t)}, \quad (3.30)$$

wo $U(t)$ die Stammfunktion des Koeffizienten $n_e (R_{i+1} + C_i)$ ist und die Inverse einer Zeitskala definiert. Damit

$$\tau_{i \leftrightarrow i+1} \doteq \frac{1}{n_e (C_i + R_{i+1})}. \quad (3.31)$$

Übung 3.5 Überzeugen Sie sich, dass die Lösung 3.30 nicht im Widerspruch zu Glg. 3.27 steht.

Um die Bedingungen für das thermodynamische Gleichgewicht zu überprüfen, müssen wir $\tau_{i \leftrightarrow i+1}$ mit einer typischen Expansionszeit τ_{exp} für den Sonnenwind vergleichen. Typischerweise wird dazu die Zeit verwendet, welche ein Sonnenwindpaket braucht, um eine Skalenhöhe der Korona zu durchqueren.

$$\tau_{exp} = \frac{H}{u}. \quad (3.32)$$

$\tau_{exp} \sim 50$ Stunden ist ein üblicherweise angegebener Wert (*Hundhausen, 1972*). Ist $\tau_{i \leftrightarrow i+1}$ kleiner als τ_{exp} , so stellt sich das Ladungsgleichgewicht schneller ein, als es durch die Expansion des Sonnenwindes verändert werden kann und das Plasma befindet sich im Ionisationsgleichgewicht. Ist die Expansionszeit τ_{exp} kürzer als $\tau_{i \leftrightarrow i+1}$, so expandiert der Sonnenwind schneller als sich die Ladungsverteilung ändern kann. In diesem Fall spricht man von "eingefrorenen" Ladungszustandsverteilungen. Weil die Elektronendichte in der Korona sehr schnell abnimmt, wird $\tau_{i \leftrightarrow i+1}$ sehr schnell zunehmen, weil der Sonnenwind beschleunigt wird, nimmt τ_{exp} schnell ab. Weil die beiden Zeitskalen gegenläufig sind, müssen sie sich irgendwo kreuzen. Die Korona weist also Gebiete auf, in denen sich das Plasma im Ionisationsgleichgewicht befindet und andere, in denen die Ladungsverteilungen eingefroren sind. Dieses sehr einfache Konzept erlaubt es, einige weitere interessante Schlüsse zu ziehen. Weil die Ionisations- und Rekombinationsraten der verschiedenen Ionen sehr unterschiedlich sein können, die Expansionszeit aber für alle ähnlich ist, müssen verschiedene Ionen(paare) in verschiedenen Abständen von der Sonne einfrieren. Wenn die Korona nicht isotherm ist, so muss sie in verschiedenen Abständen eine andere Temperatur aufweisen. Wenn das Elektronenplasma nicht Maxwellisch ist,

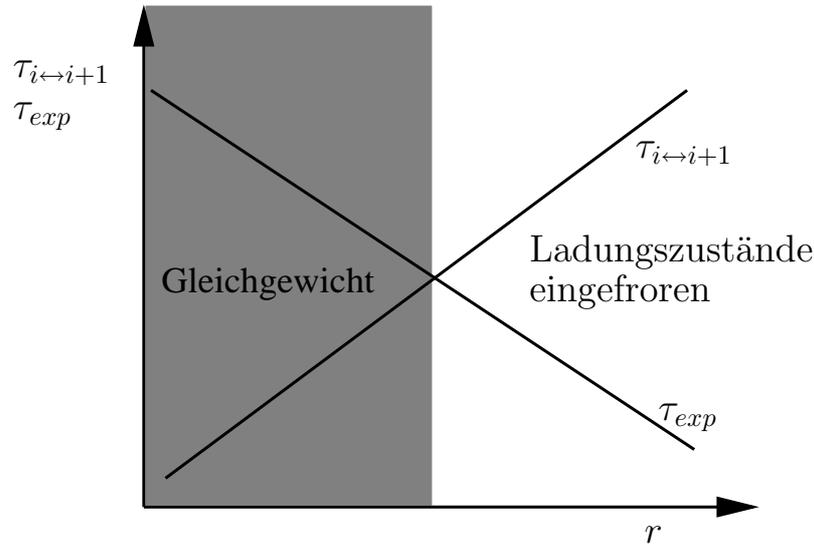


Abbildung 3.19: Modifikation von Ladungszuständen in der Korona. Solange die Expansionszeit τ_{exp} größer ist, als die $\tau_{i \leftrightarrow i+1}$ befindet sich das Plasma im Ionisationsgleichgewicht. Wenn $\tau_{exp} < \tau_{i \leftrightarrow i+1}$ sind die Ladungszustände “eingefroren”.

so ändern sich die Ionisations- und Rekombinationsraten, was sich auf Ort und Temperatur des Einfrierens auswirkt. Damit erweisen sich Messungen der Ladungsverteilungen verschiedener Ionen als gute Instrumente, um die Struktur der Korona zu bestimmen. Gemessene Ladungsverteilungen schränken die möglichen Dichte-, Temperatur und Geschwindigkeitsprofile in der Korona stark ein.

Hinweis: Die kanonische Expansionszeit von 50 Stunden beruht auf sehr wackeligen Annahmen. Dafür wird die Skalenhöhe auf 0.5 AE gesetzt und durch 400 km/s geteilt, was ungefähr 50 Stunden entspricht. Eine solche Vereinfachung ist nicht gerechtfertigt, die Expansionszeit sollte ja für Merkurbewohner dieselbe sein! Realistischer scheint es, als Skalenhöhe ein paar Sonnenradien zu nehmen. Damit verkürzt sich τ_{exp} auf ca. eine Stunde. Genau genommen ist τ_{exp} wie folgt definiert: In Anlehnung an das Verhalten einer barometrischen Atmosphäre (also mit einem exponentiell Abfallenden Dichte- und Druckprofil) wird die Skalenhöhe λ definiert als

$$|\lambda| \doteq \left| \frac{d}{dr} \ln(n(r)) \right|. \quad (3.33)$$

Damit kann die Expansionszeit leicht berechnet werden. Für das hier beispielhaft betrachtete Parkermmodell ergeben sich für eine koronale Dichte von 10^{13} m^{-3} bei $r = r_{\odot}$ Expansionszeiten von wenigen 10 Sekunden bei einem Abstand von wenigen Sonnenradien. Das gegenläufige Verhalten der Expansionszeit und Ionisationszeit wird klar, wenn man beachtet, dass nach Glg. 3.31 $\tau_{i \leftrightarrow i+1} \propto 1/n_e$ ist.

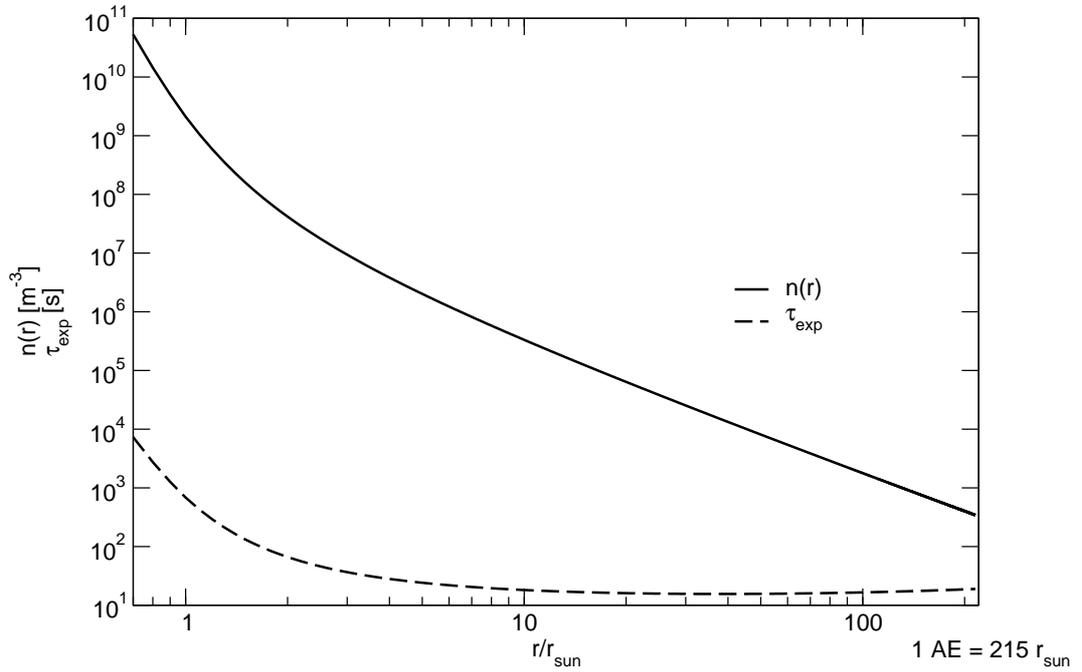


Abbildung 3.20: Dichteprofil und Expansionszeit in der Korona. Die Dichte nimmt rasch ab, die Expansionszeit ebenso, jedenfalls in der Nähe der Sonne. Sie erreicht in etwa $10 r_{\odot}$ ein sehr flaches Minimum von etwa 15 Sekunden.

Die für die Berechnung der Ionisations- und Rekombinationsraten findet man in Artikeln von *Arnaud und Rothenflug* (1985) und *Arnaud und Raymond* (1992). Neuere Werte für die verschiedenen Wirkungsquerschnitte findet man in *Mazzotta et al.* (1998). $\tau_{i \leftrightarrow i+1}$ liegt für Fe^{9+} für $T = 1 \text{ MK}$ in $2r_{\odot}$ Abstand bei etwa 110 Sekunden, während die Expansionszeit τ_{exp} etwa 1 Minute beträgt. Fe^{9+} ist also für diese Annahmen wenig innerhalb von 2 Sonnenradien eingefroren.

Andere Messungen

Eigenschaften der Korona werden mit verschiedensten Methoden bestimmt, durch optische Beobachtungen, Messungen der Radioemission oder gestreuter Radiowellen und durch Messungen von Teilchen im Sonnenwind und von solaren energiereichen Teilchen. Von Interesse sind die Bestimmung der Dichte, Temperatur, Ausflussgeschwindigkeit und Zusammensetzung der Korona.

Dichteprofile der Elektronen können recht einfach bestimmt werden, indem man die Intensität des an koronalen Elektronen gestreuten Sonnenlichtes während einer Sonnenfinsternis bestimmt. Weltraumgestützte Koronagraphen bedecken die Sonne mit einer kleinen Scheibe um eine dauernde Sonnenfinsternis hervorzurufen. Dies ist notwendig, weil die Sonnenscheibe mehrere Größenordnungen heller ist, als die Korona. Das koronale Licht setzt sich aus vier verschiedenen Komponenten zusammen, der K (Kontinuierlich), F (Fraunho-

fer), E (Emission) und T (Thermal) Korona. Dabei ist nur der Anteil der K-Korona auf Streuung durch Elektronen zurückzuführen. Die F-Korona hat ihren Ursprung in Sonnenlicht, welches an interplanetaren Staubteilchen gestreut wird, die E-Korona besteht aus Licht, welches von Ionen emittiert wird, die T-Korona aus der thermischen Emission der Staubteilchen im Infrarotbereich. In Abständen bis zu etwa einem Sonnenradius von der Sonne weg dominiert die K-Korona, weiter weg wird die F-Korona zunehmend wichtiger. Die Streuung an Elektronen heißt Thomson Streuung, der Streuquerschnitt beträgt

$$\sigma_T = \frac{8\pi}{3} \left(\frac{e^2}{mc^2} \right)^2 \approx 6.65 \cdot 10^{-29} \text{m}^2. \quad (3.34)$$

Weil sich die an der Streuung beteiligten Elektronen nur senkrecht zum einfallenden Lichtstrahl bewegen können, erscheint das von der K-Korona emittierte Licht für weit entfernte Beobachter polarisiert (Abb. 3.21). Dies ermöglicht es,

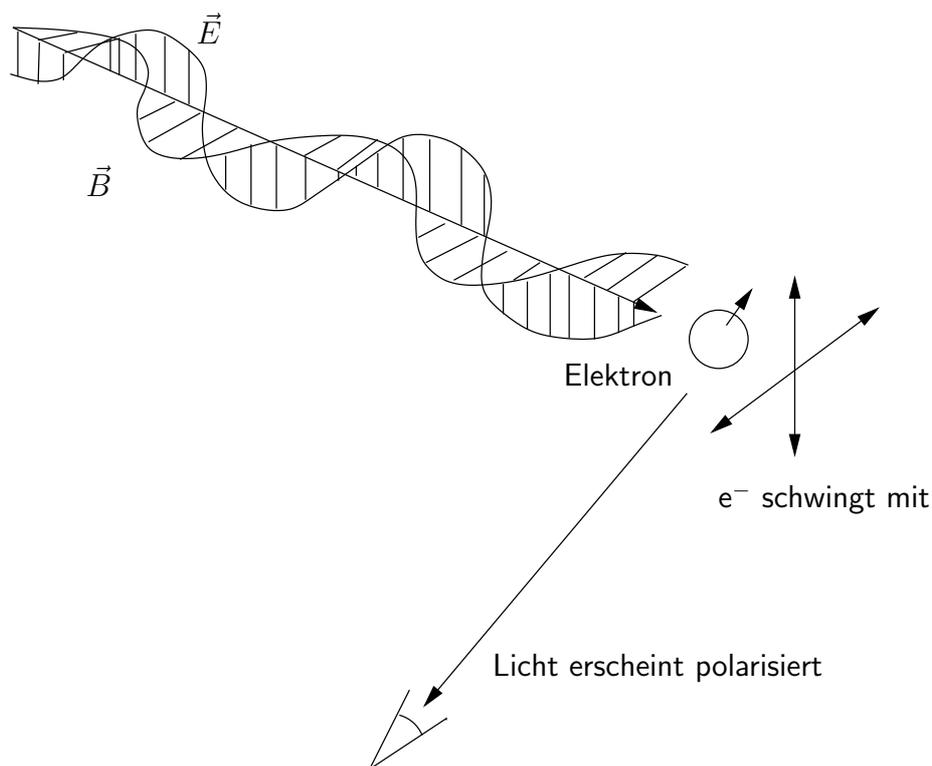


Abbildung 3.21: Das Licht von Thomson Streuung erscheint einem bei ~ 90 Grad sitzenden Beobachter polarisiert.

den Beitrag von K- und F-Korona zu trennen. Schwierigkeiten entstehen dadurch, dass die K-Korona nicht vollständig polarisiert ist, und weil auch die F-Korona eine geringe Polarisation aufweist.

Weil das Elektronenplasma in der Korona so heiß ist, werden photosphärische Emissionslinien verschmiert und wir erwarten eine glatte spektrale Emission der K-Korona. Gewisse sehr intensive Linien können aber im Licht der

K-Korona noch erkannt werden. Durch die Dopplerverbreiterung der Linien ist es möglich, auf die Temperatur im Elektronengas zu schliessen. Mehr dazu z.B. in *Golub* und *Pasachoff* (1997).

Messungen der E-Korona sind aus zwei Gründen wesentlich schwieriger. Einerseits liegen die Emissionslinien fast ausschliesslich im Ultraviolettbereich, was erfordert, dass die Messungen weltraumgestützt erfolgen. Erschwerend kommt dazu, dass die E-Korona noch einmal mehrere Größenordnungen schwächer ist, als die K- und F-Korona. Dies kann nur mit sehr schmalbandigen Spektrometern wettgemacht werden, deren Bandbreite schmal oder höchstens so breit wie die beobachteten Linien sind. Damit wird der Beitrag der Linien maximiert und der Beitrag des Hintergrundes der K- und F-Korona minimiert. Beispiele für funktionierende Spektrometer sind SUMER und UVCS auf SOHO. SUMER (Solar Ultraviolet Measurements of Emitted Radiation) wurde am Max-Planck-Institut für Sonnensystemforschung in Katlenburg-Lindau gebaut, mit Hilfe wichtiger Beiträge vom Institut d'Astrophysique Spatiale in Orsay (Frankreich), vom Goddard Space Flight Center der NASA in Greenbelt (Maryland) und der Universität von California in Berkeley, sowie mit der finanziellen Unterstützung staatlicher Stellen aus Deutschland, Frankreich, den USA und der Schweiz. SUMER misst Profile und Intensitäten von Linien im extremen ultravioletten (EUV) Licht, die in der Sonnenatmosphäre zwischen der oberen Chromosphäre und der unteren Korona emittiert werden, bestimmt Linien-Verbreiterungen, spektrale Positionen und Dopplerverschiebungen mit hoher Genauigkeit und Sicherheit, liefert typische Bilder ausgewählter Sonnenregionen im EUV-Licht mit hoher räumlicher, zeitlicher und spektraler Auflösung und nimmt in geeigneten EUV-Linien (in einem Temperatur-Intervall zwischen 10 000 und 2 000 000 K) Bilder der gesamten Sonnenscheibe und der inneren Korona auf. Insbesondere können durch die Messung der Dopplerverschiebungen und -verbreiterungen gewisser Linien die Bewegungen und Temperaturen von Plasmapaketen in der Korona bestimmt werden. UVCS misst Spektren in der äußeren Korona zwischen $1.5 r_{\odot}$ und $3.5 r_{\odot}$ mit einer Auflösung von 0.25 \AA (Linienprofile) bzw. 2 \AA (Linienintensität). Messungen von an in geringen Mengen vorhandenem neutralem Wasserstoff (H I) reflektiertem chromosphärischem H I Ly α ermöglichen es, durch die Dopplerverbreiterung der Linie die Geschwindigkeitsverteilung entlang der Sichtlinie zu bestimmen. Die Breite der Verteilung entspricht der thermischen Geschwindigkeit, welche unerwartet hoch, je nach Quellregion zwischen 100 und 320 km/s beträgt.

Bestimmungen koronaler Parameter mit UVCS verwenden nebst der soeben besprochenen Verbreiterung der Spektrallinien auch die Methode des "Doppler dimming", der Doppler Abschwächung. Um diese zu verstehen betrachten wir zunächst eine statische Korona ohne eine systematische radiale Geschwindigkeit. Der in der Korona in geringen Mengen vorhandene neutrale Wasserstoff absorbiert Ly α , welches in der kühlen Chromosphäre emittiert wird. Nach Absorption in der äußeren Korona emittiert das H I isotrop, dieser Vorgang heißt resonante Streuung. Das resonant gestreute Licht kann gemessen und seine

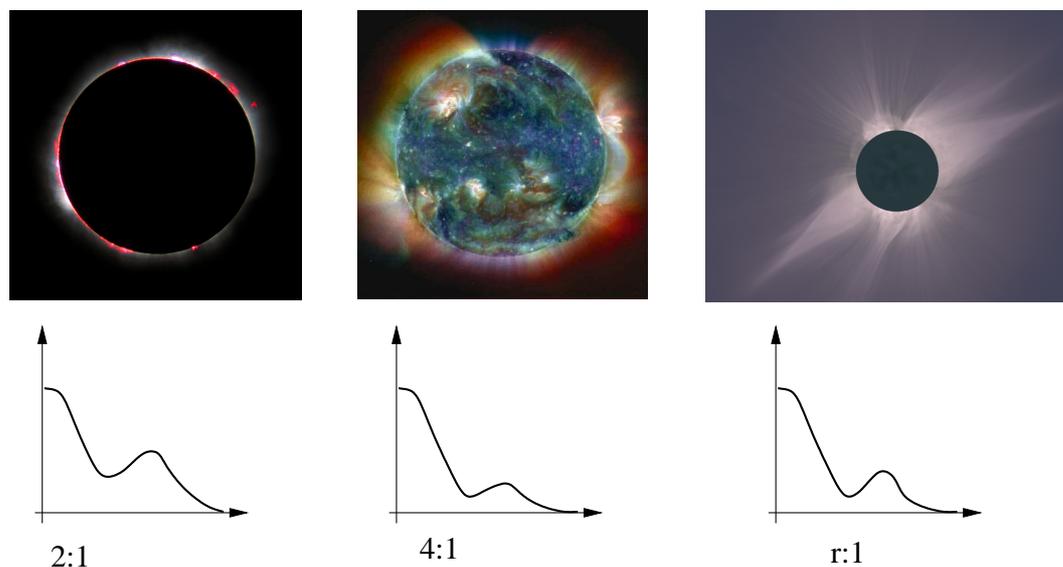


Abbildung 3.22: Doppler Pumpen in der Korona I. Das Liniendublett 1032\AA und 1037\AA von O VI wird im Verhältnis 2:1 emittiert (links). Im Falle resonanter Streuung wird die Linie dann im Verhältnis 4:1 emittiert (mitte). Bewegt sich das Plasma von der ursprünglichen Quelle weg, so sinkt das Verhältnis auf einen Wert $r : 1$ (rechts).

Intensität bestimmt werden. Besteht eine systematische radiale Geschwindigkeit, so verschiebt sich im System des koronalen H I die Ly α Linie wegen des Dopplereffekts,

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{u}{c}, \quad (3.35)$$

und das H I kann weniger Licht resonant streuen, was sich in einer Abschwächung der Intensität der Ly α Linie bemerkbar macht, die Doppler Abschwächung. Um zu funktionieren, muss diese Methode also den Anteil H I in der Korona sehr genau kennen. Dies muss durch Modellrechnungen, wie wir sie vorher beispielhaft für Eisen angedeutet haben, für den Ionisationsgrad von Wasserstoff in der Korona geschehen, weil dieser nicht direkt gemessen werden kann. Dazu muss die Elektronendichte, wie auch deren Temperatur bekannt sein.

Eine Variante der Dopplerabschwächung ist die ‘‘Doppler Pumping’’ Methode. Das Sauerstoffion O VI weist ein Linienspaar auf (1032\AA und 1037\AA), welches in der Korona durch Stöße mit Elektronen angeregt wird und im Verhältnis 2:1 emittiert. Im Falle von resonanter Streuung emittieren die Linien im Verhältnis 4:1, doppelt so stark, weil das absorbierte Licht ja in diesem Verhältnis ausgestrahlt worden ist. Durch Messung des Intensitätsverhältnisses kann also der Anteil des resonant gestreuten Lichtes bestimmt werden, wie auch die Menge emittierenden Gases. Im Falle einer Korona ohne Ausströmgeschwindigkeit emittieren die Linien im Verhältnis 4:1, für zunehmende radiale Geschwindigkeiten nimmt das Verhältnis ab, bis die Linie aus der Re-

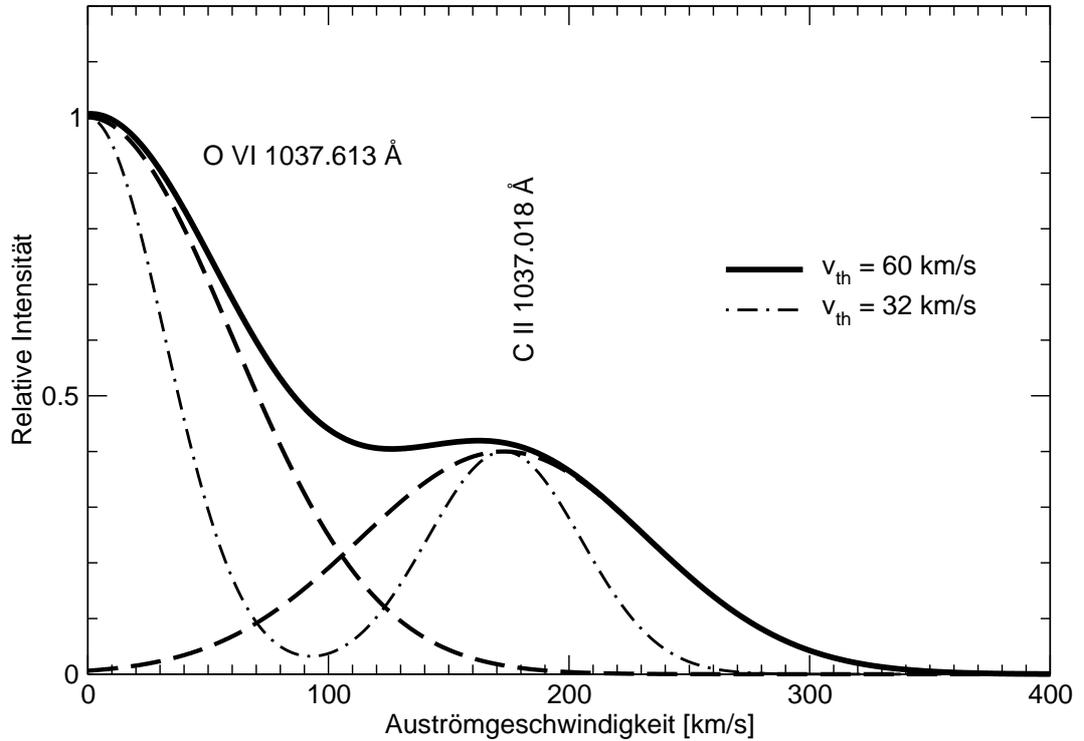


Abbildung 3.23: Doppler Pumpen in der Korona. Je nach Ausströmgeschwindigkeit und thermischer Geschwindigkeit des koronalen O VI streut dieses mehr oder weniger Licht von C II resonant. Im Falle von $v_{\text{th}} = 32$ km/s wird das Linienverhältnis bei ca. 100 km/s den Wert 2 erreichen, um dann weiter zu sinken.

sonanz herausfällt und die Linien im Verhältnis 2:1 emittieren. Ein besonderes Merkmal dieser Methode besteht nun darin, dass in der Chromosphäre C II in der Wellenlänge 1037.018 \AA emittiert. Nimmt die Geschwindigkeit weiter zu, absorbiert die O VI 1037.613 \AA Linie die C II Photonen und streut sie resonant, was das Linienverhältnis unter 2 sinken lässt. Nimmt die Geschwindigkeit noch weiter zu, steigt das Linienverhältnis wieder auf 2 an. Dies ist in Abb. 3.22 und 3.23 dargestellt.

Die mit der Doppler-Pump Methode gemessenen Ausströmgeschwindigkeiten von O VI zeigen für polare koronale Gebiete eine sehr rasche Zunahme. Innerhalb von $2 r_{\odot}$ nimmt u von 0 km/s auf über 300 km/s zu. Dies ist wesentlich schneller, als man vor der SOHO Ära gedacht hat. Die Geschwindigkeiten parallel zur Sichtlinie sind ebenfalls sehr hoch, was auf Temperaturen der O VI Ionen von ca. 10^8 Grad Kelvin hindeutet, was deutlich über der Temperatur der Elektronen von ca. 1 Million Kelvin liegt. Die heute gängige Erklärung dafür ist, dass die Ionen durch sogenannte Ionen-Zyklotron Wellen selektiv geheizt werden. Schwere Ionen weisen ein anderes Verhältnis von Masse zu Ladung, m/q , auf, als Protonen und sind deshalb in einem anderen Bereich des Wellenspektrums mit diesen Wellen resonant. Das Intensitätsspektrum von

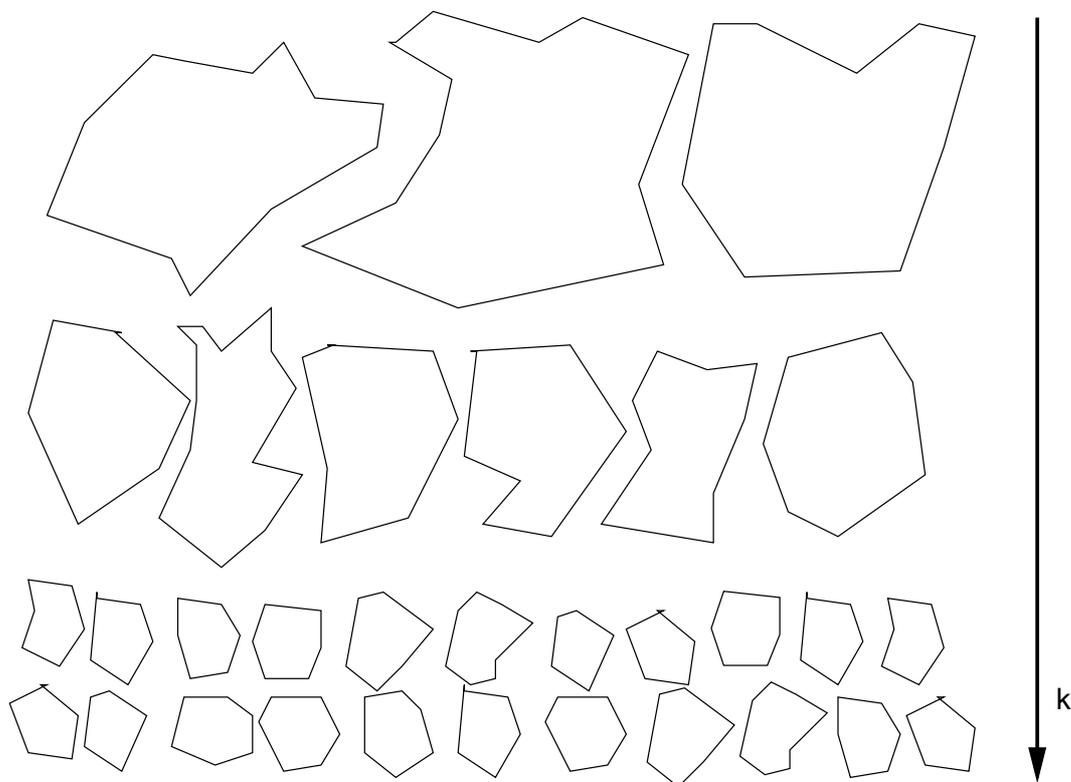


Abbildung 3.24: Turbulente Kaskade. Großräumige Strukturen zerfallen in kleinere. Dabei nimmt der Wellenvektor \vec{k} zu. Am meisten Leistung steckt in den großen Strukturen.

Plasmawellen in der Korona wird weitgehend bestimmt durch eine turbulente Kaskade, in der großräumige Bewegungen in stets kleinere zerfallen. So wird Energie, welche z.B. in großen magnetischen Schleifen gespeichert ist zunächst in kleinere Regionen innerhalb der Schleife verteilt, z.B. in kleine Wirbel, welche wiederum in noch kleinere Wirbel zerfallen, etc. bis die Energie schließlich auf der kleinsten Skala in Form von unkorrelierter thermischer Bewegung der Plasmateilchen dissipiert wird. Diese Konzept der “turbulenten Kaskade” wird in vielen Bereichen der Hydrodynamik erfolgreich angewandt. Dabei sorgt ein zunächst unbekannter nicht-linearer Prozess dafür, dass die Kaskade über viele Größenordnungen selbst-ähnlich verläuft und deshalb ein Potenzgesetz für die gespeicherte Energie (oder Leistung) beobachtet wird. Abbildung 3.25 gibt einen Eindruck, wie die Leistungsdichte sich verhält.

Noch weiter außen in der Korona können Messungen mit der Methode der interplanetaren Szintillation (IPS) gemacht werden. Dazu werden weit entfernte Radioquellen, z.B. Quasare von mehreren Radiostationen auf der Erde beobachtet. Die Radiosignale werden durch Dichtefluktuationen in der Korona verschieden fest gestreut, was sich in Intensitätsfluktuationen im Radiosignal der fernen Quellen niederschlägt. Weil die Dichtefluktuationen in der Korona

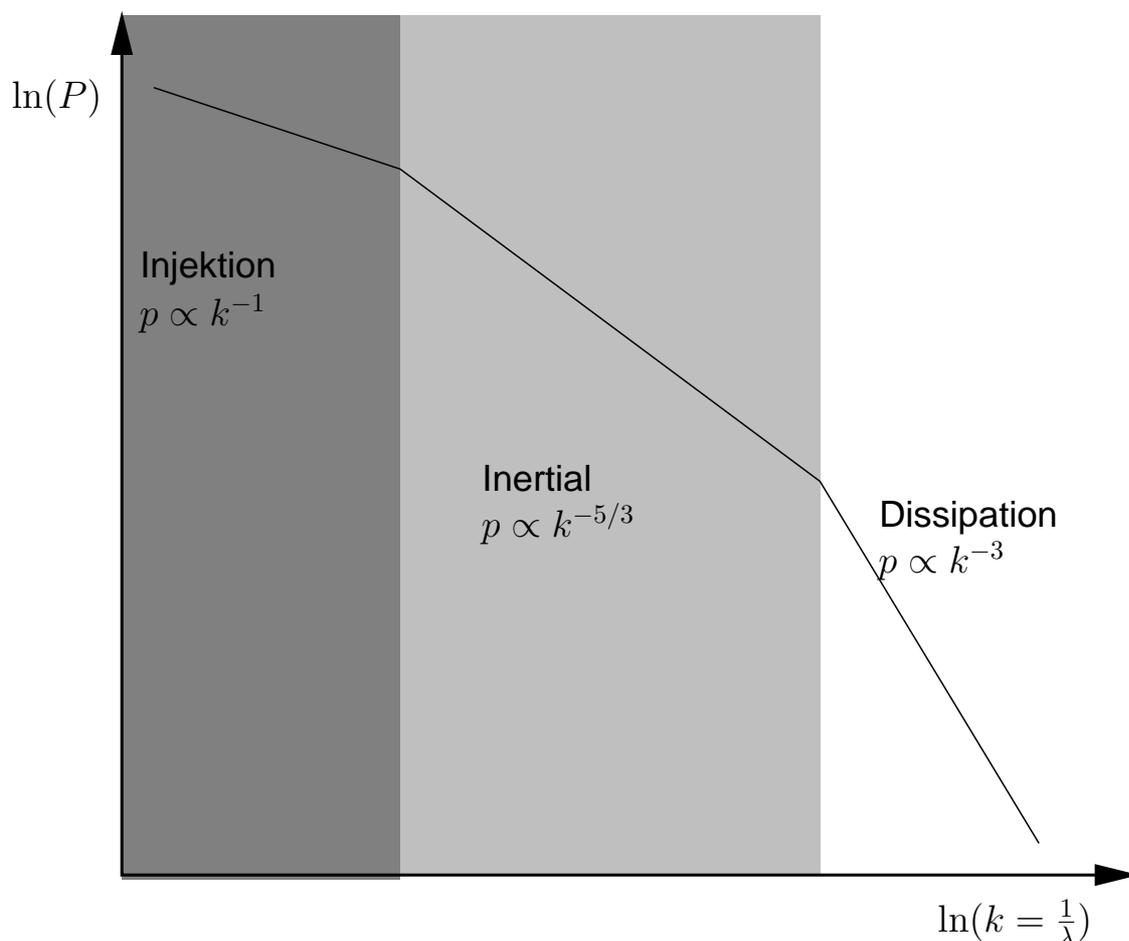


Abbildung 3.25: Frequenzspektrum von Wellen im turbulenten Sonnenwind.

nach außen konvektiert werden, bewegt sich das gestreute Signal auch auf der Erde und die verschiedenen Stationen messen ein zeitlich verzögertes Signal, das sich sonst ähnlich sieht, jedoch aufgrund kleiner Unterschiede in der Korona nicht exakt übereinstimmt. Durch eine Korrelationsanalyse der verschiedenen Signale kann die Geschwindigkeit der Dichtefluktuation bestimmt werden. Aufgrund der Dichtekontraste kann diese Methode zwischen ca. 20 und 100 r_{\odot} zuverlässige Resultate liefern. Solange nicht Wert auf kurzfristige Geschwindigkeitsmessungen gelegt wird, können mit dieser Methode durchschnittliche Geschwindigkeiten über weite Bereiche der Korona bestimmt werden. Insbesondere können “tomographische” Messkampagnen die globale Geschwindigkeitsverteilung der Korona liefern, welche mit anderen Methoden nicht möglich sind.

Genau genommen hört die Korona nicht bei 5, auch nicht bei 20 oder mehr r_{\odot} Abstand von der Sonne auf. Damit sind Messungen von Teilchen im interplanetaren Medium eigentlich auch Messungen der Teilchen in der Korona. Die bei weitem häufigste Population von Teilchen ist der Sonnenwind. Die

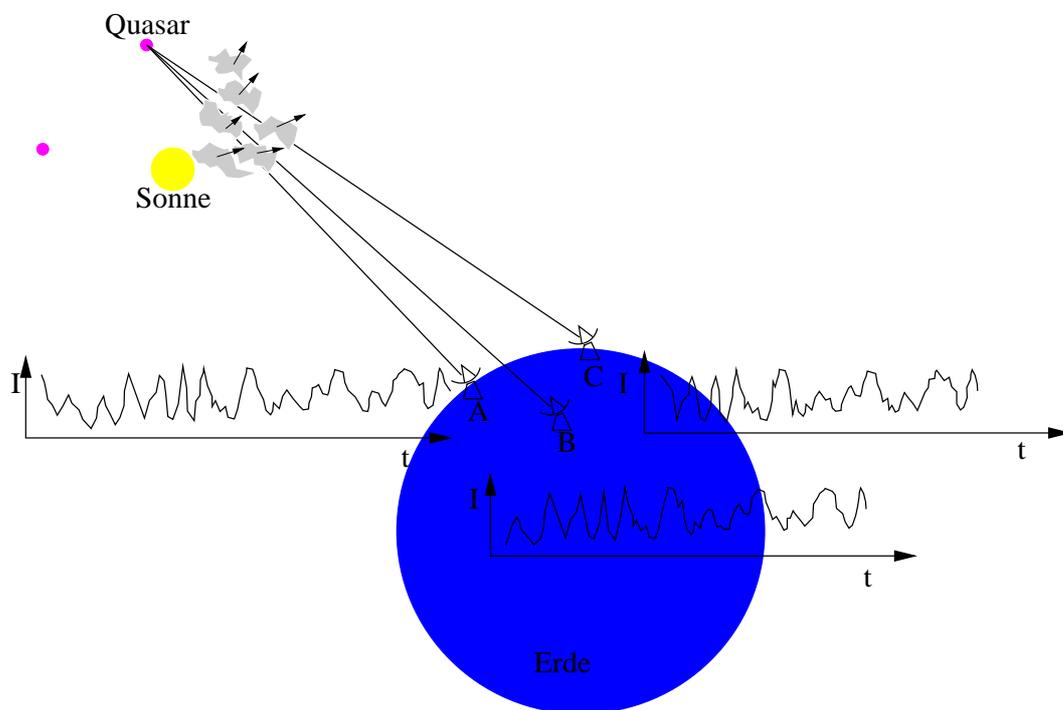


Abbildung 3.26: Interplanetare Szintillation. Dichteveränderungen im Sonnenwind rufen Intensitätsschwankungen im transmittierten Radiosignal ferner Quellen auf. Die Schwankungen werden über die Erde bewegt mit der Geschwindigkeit der Plasmapakete, also des Sonnenwindes. Durch Korrelation der Beobachtungsstationen untereinander kann die Sonnenwindgeschwindigkeit in der Korona gefunden werden.

ersten in-situ Messungen des Sonnenwindes (und damit der Korona) wurden kurz nach den Vorschlägen von Chapman und Parker zur Erklärung eines Sonnenwindes in den frühen 1960-er Jahren gemacht. Diese Messungen stellten ein für alle Mal klar, dass das interplanetare Medium von einem überschallschnellen Strom von Sonnenwindteilchen erfüllt wird. Die ersten Messungen wurden mit Instrumenten auf den russischen Weltraumsonden Luna 2 und 3, sowie Venus 3 gemacht (*Gringauz et al.*, 1960; *Gringauz*, 1961; *Gringauz et al.*, 1967). Die russischen Messungen zeigten einen Fluss von mehreren 10^7 Teilchen pro cm^2 und Sekunde. Darauf folgende Messungen mit verbesserter Technik auf der amerikanischen Sonde Explorer 10 zeigten denselben Fluss (*Bonetti et al.*, 1963) und eine Geschwindigkeit von ca 280 km/s und Protonentemperaturen zwischen 3 und $8 \cdot 10^5$ Kelvin (*Scherb*, 1964). Die ersten kontinuierlichen Langzeitmessungen des Sonnenwindes wurden mit der amerikanischen Sonde Mariner 2 auf ihrem Weg zur Venus gemacht. Die Messungen zeigten einen kontinuierlichen überschallschnellen Fluss von Sonnenwindteilchen (*Snyder und Neugebauer*, 1964; *Neugebauer und Snyder*, 1966)..

Heute wird der Sonnenwind routinemäßig auf mehreren Sonden gemessen

und die interplanetaren Parameter in “near-real-time” zu Erde gesandt. Sie sind so wenige Minuten nach ihrer Messung auf einer Raumsonde im Internet abrufbar und dienen z.B. zur besseren Vorhersage des “Weltraumwetters”, welches z.B. für Telekommunikationssatelliten gefährlich werden kann, aber auch für den Funkbetrieb wichtig ist, weil die Leitfähigkeit der Ionosphäre durch diese Größen beeinflusst wird. Informationen über koronale Größen können hauptsächlich aus Kompositionsdaten der Instrumente SWICS (Solar Wind Ion Composition Spectrometer) auf Ulysses und ACE, sowie CTOF (Charge Time of Flight) auf SOHO gewonnen werden. Diese Instrumente messen nicht nur die Geschwindigkeit und Temperatur der Hauptkomponente des Sonnenwindes, dem Wasserstoff, sondern auch die Zusammensetzung (und die kinetischen Eigenschaften) der schweren Ionen. Wie wir gesehen haben, liefert die Ladungsverteilung der schweren Ionen Informationen über Verhältnisse in der Korona. Diese Instrumente beruhen alle auf demselben Prinzip. Ein Sonnenwindion ist charakterisiert durch drei Größen, seiner Energie, Masse und Ladung. Die Instrumente kombinieren eine elektrostatische Ablenkung mit einer Messung der Flugzeit und der Energie des Teilchens. Im elektrostatischen Ablenkensystem wird die Energie pro Ladung (E/q) festgehalten. Die eindringenden Sonnenwindteilchen durchfliegen eine Strecke bekannter Länge, und dafür wird die Flugzeit bestimmt. Mit einer dritten Messung, die der verbleibenden Energie des Teilchens sind nun drei Messungen für die drei Unbekannten gemacht worden und diese können bestimmt werden. Die Auflösung dieser Instrumente wird begrenzt durch die E/q Auflösung des Eintrittssystems, einen wenig bekannten Energieverlust in den zum Triggern eines Startpulses für die Flugzeitmessung verwendeten dünnen (ca. 120 Å) Kohlenstofffolien, einer nicht unbeträchtlichen Dispersion in der Flugzeitmessung und in Schwankungen in der gemessenen Energie. Selbst neuste Instrumente dieses Typs erlauben keine wesentlich verbesserte m/q und m Auflösung. Trotzdem gelingt es auf diese Weise, die Zusammensetzung des Sonnenwindes zu messen. Die während eines Tages (dem 1.1.2000) akkumulierten Daten von ACE/SWICS sind in Abb. 3.27 wiedergegeben.

3.3 Das solare Magnetfeld und der solare Dynamo

Die Frage, wie ein rotierender Körper wie die Sonne ein Magnet werden konnte, wurde zuerst durch Sir Joseph Larmor (*Larmor*, 1919) in seinem Artikel “How could a Rotating Body such as the Sun become a Magnet?” korrekt behandelt. Dort hat er beschrieben, wie Konvektion in der Sonne ein elektrisches Feld aufbauen könnte, welches seinerseits zu Strömen führen würde, welche ihrerseits ein Magnetfeld erzeugen würden. Interessanterweise hat das irdische Magnetfeld zu jener Zeit weniger Interesse hervorgerufen, weil man damals geglaubt hat, dass es als permanentes Magnetfeld verstanden werden könne. Heute wissen wir aus seismologischen Untersuchungen, dass das Innere

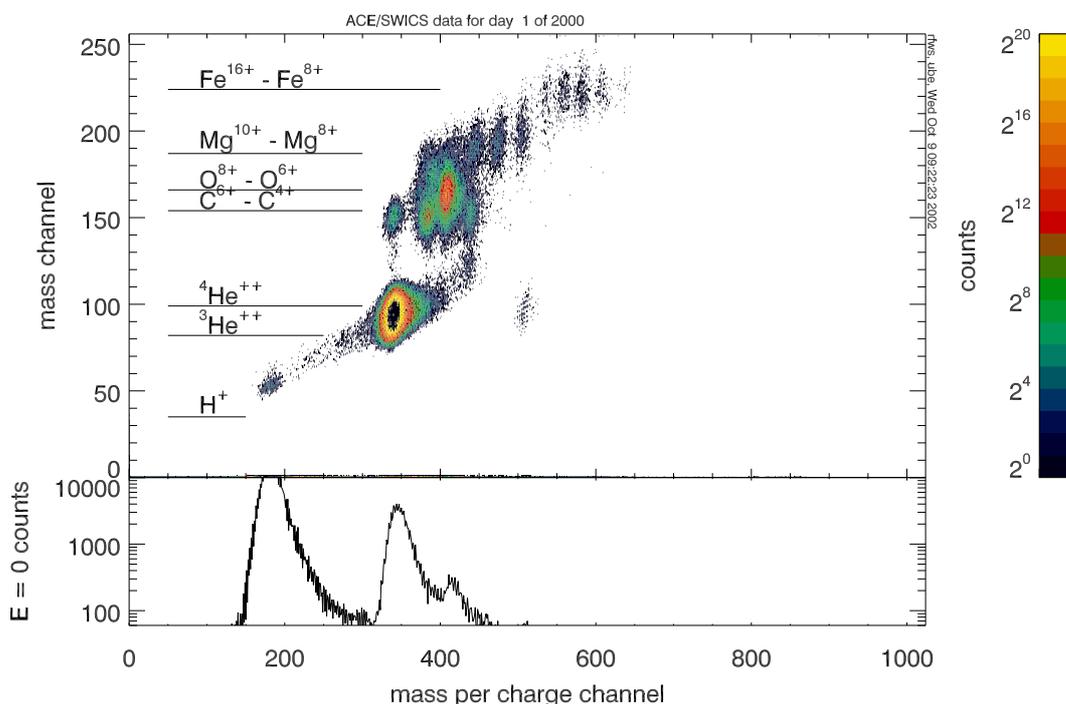


Abbildung 3.27: Rohdaten zur Bestimmung der Zusammensetzung des Sonnenwindes. Die Figur zeigt Daten, welche vom Instrument SWICS auf ACE während eines Tages (1.1.2000) gemacht wurden. Ladungszustände wie auch Massen der Sonnenwindionen werden aufgelöst.

der Erde und der meisten Planeten flüssig ist und dass darin Temperaturen weit über der Curie-Temperatur jedes bekannten Permanentmagneten herrschen. Larmor hat diesen Punkt erkannt und postuliert, dass das Magnetfeld der Erde denselben Ursprung haben sollte, wie das der Sonne. Demnach liegt der kritische Punkt eines jeden planetaren oder stellaren Magnetfeldes darin, eine Geometrie oder Zirkulation zu finden, welche auf natürlichem Wege zu Strömen führen würde, die ein Magnetfeld hervorrufen würden. Diese Konfiguration heißt '**Dynamo**'. Wir besprechen hier zuerst die Beobachtungen des solaren Magnetfeldes und werden anschließend eine Reihe von zunehmend komplizierteren (aber auch realistischeren) Dynamo-Modellen besprechen.

Die magnetische Konfiguration der Sonne ändert sich im Laufe eines Aktivitätszyklus, aber auch auf wesentlich schnelleren Zeitskalen. Letztlich muss die Ursache im solaren Dynamo liegen, welcher das Magnetfeld der Sonne treibt. Die differentielle Rotation der Sonne führt dazu, dass sich das Magnetfeld in Äquaturnähe mehr aufwickelt, als in höheren Breiten (Abb. 3.28.).³ Der verstärkte magnetische Druck muss durch einen verringerten Druck im solaren Plasma kompensiert werden, damit die ganze Region im Druckgleich-

³Es sei hier nur angemerkt, dass differentielle Rotation eine für den Betrieb eines Dynamos notwendige Voraussetzung ist.

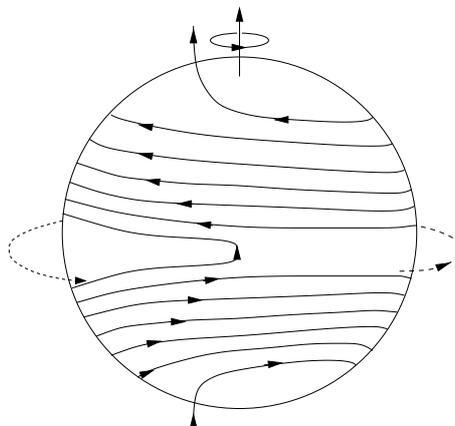


Abbildung 3.28: Das solare Magnetfeld wird in Äquatornähe stärker aufgewickelt, als in höheren Breiten. Gezeigt ist hier nur die Region zwischen der äußeren konvektiven Zone und dem radiativen Kern der Sonne. Hier ist nach gängigen Dynamomodellen der Ursprung des solaren Dynamos situiert.

gewicht bleibt. Wegen der ausgezeichneten Wärmeleitfähigkeit des Materials, kann dies nicht durch Abkühlung, sondern nur durch Verringerung der Dichte des Plasmas erreicht werden. Damit wird das Plasmapakett leichter und erfährt eine Auftriebskraft (engl. magnetic buoyancy), welche dazu führen kann, dass das Magnetfeld die Photosphäre lokal durchsticht und dort im einfachsten Fall zu einem Paar von Sonnenflecken mit entgegengesetzter Polarität führen kann. Dies ist die Erklärung für das sog. Hale'sche Gesetz, welches besagt, dass in jeder Hemisphäre der Sonne die Polarität der führenden (im Sinne der Sonnenrotation) Sonnenflecken in der Regel der Polarität des polaren koronalen Loches des vorhergehenden Aktivitätsminimums entspricht, vgl. Abb. 3.30. In der Re-

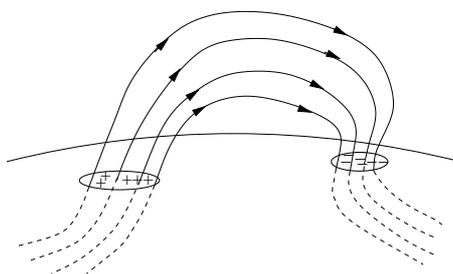


Abbildung 3.29: Der magnetische Auftrieb führt zur Ausbildung eines Sonnenfleckenpaares. Zusammen mit der aus der differentiellen Rotation der Sonne folgenden toroidalen Magnetfeldkonfiguration (siehe Abb. 3.28) lässt sich das Hale'sche Gesetz (Abb. 3.30) verstehen.

gel tendieren Sonnenflecken dazu, in Gruppen aufzutreten, welche wiederum in aktive Regionen konzentriert sind. Diese Tendenz zur Clusterbildung deutet darauf hin, dass die Oberfläche der Sonne eine recht undurchdringliche Barriere

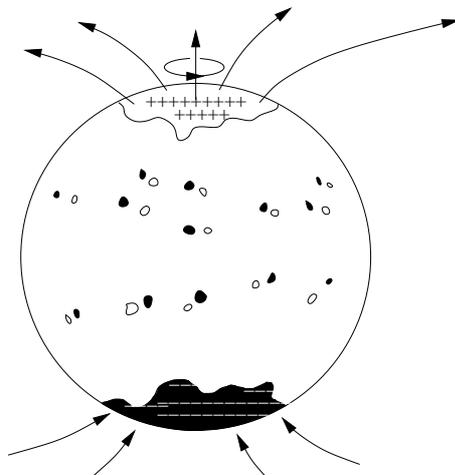


Abbildung 3.30: Das Hale'sche Gesetz. Die Polarität der führenden Sonnenflecken entspricht in der Regel der des polaren koronalen Loches derselben Hemisphäre während des vorhergehenden Sonnenaktivitätsminimums.

für magnetischen Fluss darstellt, welche in Gebieten, die bereits durchbrochen worden sind geschwächt ist. Abbildung 3.31 illustriert diesen Sachverhalt. Die zwar systematische konvektive Bewegung in jeder Granule⁴ führt dazu, dass es sehr schwierig ist, eine magnetische Schleife, welche im subphotosphärischen Material verankert ist, in die Korona expandieren zu lassen. Das Magnetfeld muss sich in den absinkenden Regionen (und damit hauptsächlich in den Vertices) der Granulation und Supergranulation konzentrieren. Das Aufquellen von Material in den Granulen führt zu einer laufenden Vergrößerung dieser Strukturen, welche nach Erreichen einer gewissen Grenzgröße in zwei oder mehrere Granulen zerfallen. Diese dauernd stattfindende stochastische Bewegung der

⁴Eine Zelle aufquellenden solaren Materials. Sie erscheinen im optischen Bereich als isolierte helle Elemente, die durch dunkle intergranulare Gassen (intergranular lanes) von einander getrennt sind. Sie wurden erstmals von Herschel, Nasmyth und Secchi im 19-ten Jahrhundert beobachtet. Sie können durch den Abstand D_G zwischen Zentrum und Zentrum von zwei Granulen und dem Granulendurchmesser $D_G = \sqrt{A_G/\pi}$ charakterisiert werden. Die Verteilung von d erreicht ein Maximum zwischen 1.5 und 2 Bogensekunden, die Verteilung der Durchmesser ist monoton fallend, weil eine noch so kleine Granule einen endlichen Abstand von der Nachbargranule aufweisen muss. Die Lebensdauer von Granulen kann durch die Autokorrelation von Beobachtungen von photosphärischen Intensitätsfluktuationen bestimmt werden, typischerweise wird ein Wert von ca. 6 Minuten für die Zerfallszeit auf $1/e$ angegeben. Über das Muster der Granulation scheint ein Muster der Supergranulation gelegt zu sein. Dieses besteht aus Gebieten einer Ausdehnung von ca. $30'000$ km, welche lose zusammenhängen, deren Ränder nicht unbedingt alle zusammenhängen, welche aber konzentrierte Abflussgebiete aufzuweisen scheinen. Diese Grenzregionen scheinen mit dem chromosphärischen Netzwerk zusammenzufallen. Das Magnetfeld ist in diesen Regionen verstärkt, der Abfluss scheint es hier zu konzentrieren, wie in Figur 3.31 angedeutet. Dieser Sachverhalt kann in der Ca II K Linie festgestellt werden. Diese Linie scheint besonders empfindlich auf die magnetische Feldstärke zu sein (Leighton, 1959). Die Randgebiete heißen englisch "plages". Supergranulen haben eine Lebensdauer von ca. einem Tag.

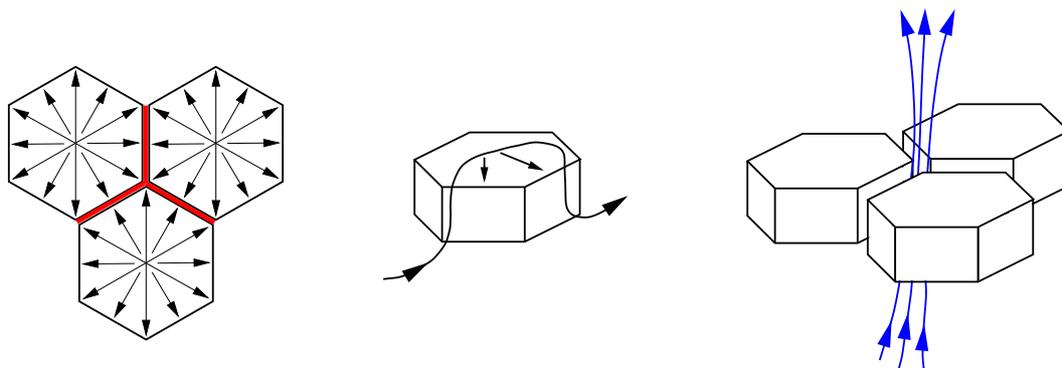


Abbildung 3.31: Das aufquellende heiße subphotosphärische Material in Granulen kühlt ab und sinkt in den Zwischenräumen wieder nach unten. Die Beobachtung solcher Strömungen ist viel allgemeiner und nicht auf die Sonne beschränkt. Diese Strömungstopologie führt zum topologischen Pumpen. Deshalb kann keine isolierte Feldlinie aus einer Granule herausragen. Feldlinien müssen sich auf die Zwischenräume konzentrieren (intergranular lanes).

Granulation, wie auch das u. U. weiterführende Aufquellen des magnetischen Flusses führt zur Ausbildung von sog. "Evolving Magnetic Structures" (EMS). Diese Regionen bleiben über mehrere Sonnenrotationen bestehen, verändern aber während ihres Lebens ihre Form. Anfänglich komplexe Strukturen vereinfachen sich zunehmend, um gegen das Ende der Lebensdauer in einfache bipolare Regionen überzugehen (Abb. 3.32). Einen wesentlichen Einfluss auf



Abbildung 3.32: Eine Evolving Magnetic Structure (EMS) entwickelt sich von einer anfänglich komplexen magnetischen Struktur zu einer zunehmend einfachen Struktur mit einer ausgeprägten Neutrallinie (gestrichelt).

diese Entwicklung hat die stochastische Bewegung der Granulen und Supergranulen. Dies geschieht durch sogenannte magnetische Rekonnektion, welche hier nicht behandelt wird. Diese wird getrieben durch stochastische photosphärische Bewegungen der Fußpunkte der Feldlinien. Die konvektive Bewegung der Granulation und Supergranulation ist stochastischer Natur. Im Verlauf der topologischen Vereinfachung nimmt auch die in der EMS vorhandene Magnetfeldstärke ab, wie dementsprechend auch die magnetische Energie in diesen Regionen abnehmen muss. Diese muss in die Heizung und Beschleunigung von koronalem Material gesteckt werden, wohin wollte sie den sonst? In der Tat

sind EMS der Ort von aktiven Regionen, gewaltige Energiemengen werden hier oft in sehr kurzer Zeit in Form von flares freigesetzt, in längeren Zeitskalen in Form von sogenannten CMEs (Coronal Mass Ejections). Diese energetischen Manifestationen sind die Treiber von interplanetaren Störungen.

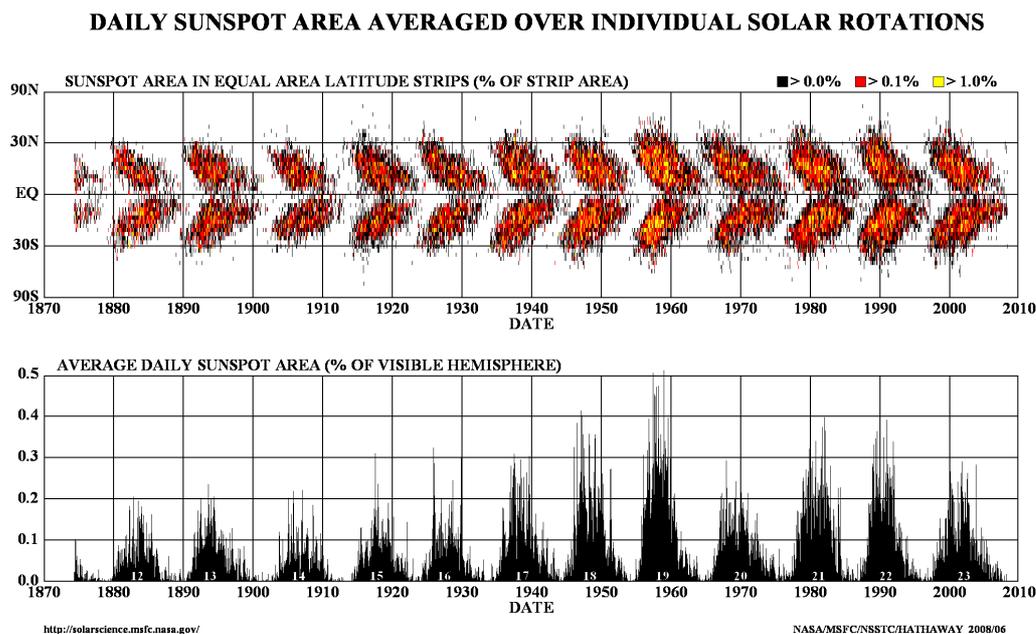


Abbildung 3.33: Ein Schmetterlingsdiagramm (butterfly diagram) zeigt heliographische Breite und Anzahl von Sonnenflecken zu einer bestimmten Zeit. Sonnenflecken wandern mit der Zeit gegen den Äquator. Gegen Ende eines magnetischen Zyklus befinden sich die meisten Flecken dieses Zyklus in Äquaturnähe während sich in hohen Breiten bereits die ersten Sonnenflecken des neuen Zyklus bilden. Quelle: Marshall Space Flight Center (<http://solarscience.msfc.nasa.gov/SunspotCycle.shtml>).

3.3.1 Potentialfelder

Vorbemerkungen: Das Gesetz von Ampère lautet

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}. \quad (3.36)$$

Übung 3.6 Zeigen Sie anhand einer Skalenabschätzung, dass bei den langsamen Bewegungen auf der Sonne und in der Korona der Verschiebungsstrom vernachlässigt werden darf.

In der Korona lautet das Ampèresche Gesetz also

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j}. \quad (3.37)$$

Das Ohmsche Gesetz lautet

$$\vec{j} = \sigma \vec{E}' = \sigma (\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}), \quad (3.38)$$

wo \vec{E}' das totale elektrische Feld in einem sich mit dem Plasma bewegenden Bezugssystem ist.

Solare Magnetfelder: Die hohe Komplexität des solaren photosphärischen Magnetfeldes verunmöglicht es nahezu, ein genaues und geschlossenes Modell des koronalen Magnetfeldes zu entwickeln. Andererseits werden photosphärische Magnetogramme routinemäßig zur Verfügung gestellt, was nahelegt, eine Möglichkeit der Extrapolation dieses Feldes in die Korona zu suchen. Nach dem Ampèreschen Gesetz führt ein elektrischer Strom zu einem Magnetfeld. Wir werden weiter unten sehen, dass das solare Magnetfeld unterhalb der Photosphäre, in der Konvektions-, bzw. deren overshoot-zone, erzeugt wird. Wenn wir annehmen, dass diese Ströme wesentlich größer sind als die Ströme in der Korona, so können wir das Magnetfeld \vec{B} als **Potentialfeld** auffassen. Es ist nicht mehr notwendig, \vec{B} durch ein Vektorpotential $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$ auszudrücken, es reicht

$$\vec{B} = -\vec{\nabla}\Phi. \quad (3.39)$$

Wegen $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$ muss ein solches Potentialfeld \vec{B} auch die Laplacegleichung $\vec{\nabla}^2 \Phi = \Delta \Phi = 0$ erfüllen.

Übung 3.7 Zeigen Sie dies!

Wenn wir umgekehrt annehmen, dass \vec{B} als Potentialfeld ausgedrückt werden kann und wie bereits erwähnt der Verschiebungsstrom $\varepsilon_0 \partial \vec{E} / \partial t$ vernachlässigt werden darf, so folgt, dass ein Potentialfeld auch stromfrei ist.

Übung 3.8 Zeigen Sie auch dies!

Um das globale koronale Magnetfeld zu bestimmen, muss also die Laplacegleichung gelöst werden (siehe Übung 3.7) und zwar in Kugelkoordinaten. Dabei wird das photosphärische Magnetfeld als innere Randbedingung (Neumann Randbedingung) genommen und z. B. gefordert, dass ab einer Höhe r_w das Feld radial sein soll. Eine Lösung ist gegeben durch

$$\Phi(r, \theta, \phi) = r_\odot \sum_{l=1}^N \sum_{m=0}^l f_l(r) P_l^m(\theta) (g_l^m \cos m\phi + h_l^m \sin m\phi), \quad (3.40)$$

wo die Funktion $f_l(r)$ durch

$$f_l(r) \doteq \frac{(r_w/r)^{l+1} - (r/r_w)^l}{(r_w/r_\odot)^{l+1} - (r_\odot/r_w)^l} \quad (3.41)$$

gegeben ist. Offensichtlich gilt $f_l(r = r_w) = 0$ und ab diesem Abstand muss das Feld radial sein. Die Idee dahinter ist natürlich, dass wir annehmen, dass ab

einem gewissen Abstand (r_w eben) der supersonische und unendlich leitfähige Sonnenwind das Feld radial mit nach außen reisst. Abbildung 3.16 zeigt, dass diese Näherung doch recht gut ist. Die Funktionen $P_l^m(\theta)$ sind die üblichen Legendre-Polynome, wie sie bei Lösungen in Kugelkoordinaten oft auftreten. Ein solches Modell des koronalen Magnetfeldes heißt “potential field source surface” Modell (PFSS) und ist z. B. in Solar Soft implementiert. Die Amplituden der einzelnen Multipole in der Entwicklung (Glg. 3.40) werden durch die Koeffizienten g_l^m und h_l^m bestimmt. Diese können durch eine χ^2 Anpassung an das photosphärische Magnetfeld (bei $r = r_\odot$) gewonnen werden. Offensichtlich erhöht die Ordnung der maximalen Multipolkomponenten die Details der koronalen Magnetfelder, allerdings darf nicht erwartet werden, dass sie auch stimmen - die Annahme, dass die Potentiallösung die Realität beschreibt, ist ja nicht unbedingt besonders gut begründet. Pikanterweise heißen diese Lösungen auch “hairy balls”. Die Genauigkeit der Lösung kann abgeschätzt werden, indem die gefundene Entwicklung mit koronalen Strukturen verglichen wird, und indem man annimmt, dass diese der Magnetfeldstruktur folgen. Leider ist es heute nicht möglich, koronale Magnetfelder vektoriell zu messen und so diese Modelle zu testen⁵

3.3.2 Kräftefreie Felder

Ein anderer mathematisch noch relativ einfach zu behandelnder Spezialfall für magnetische Feldkonfigurationen auf der Sonne sind kräftefreie Felder. Wenn sich systematische Relativbewegungen von Ladungen herausbilden, dann können wir ein Bezugssystem wählen, indem sich die eine Sorte Ladungsträger relativ zum restlichen Plasma mit einer Geschwindigkeit \vec{v} im Magnetfeld \vec{B} bewegt. Es wirkt also die Lorentzkraft

$$\vec{F}_L^* = qn (\vec{v} \times \vec{B}) \quad (3.42)$$

auf ein Volumen des Plasmas. Die Stromdichte \vec{j} der bewegten Ladungen ist

$$\vec{j} = qn\vec{v} \quad (3.43)$$

und die Lorentzkraft kann also geschrieben werden als

$$\vec{F}_L^* = \vec{j} \times \vec{B}. \quad (3.44)$$

Dieser Kraftterm wird nun in jeder Bewegungsgleichung auftauchen müssen, welche ein magnetisiertes Plasma beschreibt. Eine **kräftefreie** Feldkonfiguration ergibt sich aber, wenn dieser Term verschwindet, wenn also

$$\vec{j} \times \vec{B} = 0. \quad (3.45)$$

⁵Auf Solar Orbiter soll erstmals ein Instrument zur Bestimmung dieser Felder, PHI, fliegen.

Mit dem Ampèreschen Gesetz $\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu \vec{j}$ können wir diese Bedingung auch schreiben als

$$(\vec{\nabla} \times \vec{B}) \times \vec{B} = 0. \quad (3.46)$$

Dies ist eine nicht-lineare Gleichung deren Lösung ein kräftefreies Feld im oben definierten Sinn ergibt. Die Lösung ist in der Regel nicht trivial, weil nicht linear. Die Gleichung besagt, dass die Rotation des Feldes parallel oder antiparallel zum Feld ist, was man sich schwer vorstellen kann. Wir diskutieren deshalb im folgenden Abschnitt eine solche Konfiguration.

Lineare kräftefreie Felder

Eine lineare Gleichung von Glg. 3.46 kann bestimmt werden, indem wir

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu \vec{j} = \alpha(\vec{r}) \vec{B} \quad (3.47)$$

setzen, wo $\alpha(\vec{r})$ vorerst eine skalare ortsabhängige und evtl. sogar zeitanhängige Funktion sei. Der Fall mit $\alpha(\vec{r}) \neq 0$ beschreibt also eine Feldkonfiguration, die *nicht* durch ein Potentialfeld beschrieben werden kann. Die Wahl von $\alpha(\vec{r})$ und damit der Feldkonfiguration wird durch zwei Bedingungen eingeschränkt. Einerseits muss das Feld stets divergenzfrei bleiben, $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$, wie auch die Divergenz der Stromdichte und folglich $\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{B}) = 0$, also

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{B}) = \vec{\nabla} \cdot (\alpha(\vec{r}) \vec{B}) = \alpha (\vec{\nabla} \cdot \vec{B}) + \vec{B} \cdot \vec{\nabla} \alpha(\vec{r}) = \vec{B} \cdot \vec{\nabla} \alpha(\vec{r}) = 0. \quad (3.48)$$

Diese Bedingung wird erfüllt, wenn $\alpha(\vec{r})$ konstant entlang einer Feldlinie ist und entlang ihr immer $\vec{\nabla} \alpha = 0$ gilt. Deshalb muss entlang jeder Feldlinie gelten, dass

$$(\vec{\nabla} \times \vec{B}) = \alpha \vec{B}. \quad (3.49)$$

Benachbarte Feldlinien können verschiedene Werte für α aufweisen.

Übung 3.9 Zeigen sie, dass für ein kräftefreies Feld nach Glg. 3.49 und mit ortsunabhängigem α gilt

$$\Delta \vec{B} + \alpha^2 \vec{B} = 0. \quad (3.50)$$

Ein Beispiel - die gescherte Arkade



Ein Beispiel für eine lineare kräftefreie Feldkonfiguration geben *Priest* (1982) und *Sturrock* (1994) an, die den sog. **Arkaden** oder Schleifen oder “loops” auf der Sonne sehr ähnelt (siehe Abb. 3.34). Solche Schleifensysteme bilden sich oft nach einer Eruption (einem koronalen Massenauswurf) in der zurückbleibenden Korona. Sie sind von oben als parallel ausgerichtete Schleifen sichtbar, getrennt

Abbildung 3.34: Schleifen in der Korona. Quelle: TRACE/NASA

durch eine Neutrallinie. Treten nun auf beiden Seiten der Neutrallinie Scherbewegungen auf (parallel zur Neutrallinie, antiparallel zueinander), so entsteht eine **gescherte Arkade**. Je stärker die Scherung ist, desto größer ist der Winkel zur Senkrechten auf die Neutrallinie und desto stärker die Nicht-Potential-Natur des Feldes, wie wir sehen werden.

Eine mathematisch einfache Konfiguration ist gegeben durch

$$\begin{aligned} B_x &= B_{x0} \sin(kx) \exp(-lz), \\ B_y &= B_{y0} \sin(kx) \exp(-lz), \\ B_z &= B_0 \cos(kx) \exp(-lz). \end{aligned} \quad (3.51)$$

Davon können wir leicht die Rotation bilden,

$$\begin{aligned} (\vec{\nabla} \times \vec{B})_x &= \partial_y B_z - \partial_z B_y = l B_{y0} \sin(kx) \exp(-lz), \\ (\vec{\nabla} \times \vec{B})_y &= \partial_z B_x - \partial_x B_z = (-l B_{x0} + k B_0) \sin(kx) \exp(-lz), \\ (\vec{\nabla} \times \vec{B})_z &= \partial_x B_y - \partial_y B_x = k B_{y0} \cos(kx) \exp(-lz). \end{aligned} \quad (3.52)$$

Als nächstes setzen wir die Bedingung 3.49 für ein lineares kräftefreies Feld ein und erhalten

$$\begin{aligned} l B_{y0} &= \alpha B_{x0}, \\ (-l B_{x0} + k B_0) &= \alpha B_{y0}, \\ k B_{y0} &= \alpha B_0. \end{aligned} \quad (3.53)$$

Diese drei Gleichungen bestimmen die Feldkomponenten B_{x0} und B_{y0} und ergeben eine einschränkende Bedingung an die sonst frei wählbaren Parameter α , l und k ,

$$\begin{aligned} B_{x0} &= \frac{l}{k} B_0, \\ B_{y0} &= \frac{\alpha}{k} B_0, \\ k^2 - l^2 - \alpha^2 &= 0. \end{aligned} \quad (3.54)$$

Gleichung 3.54 entspricht gerade der Bedingung 3.50. Wenn wir die z -Komponenten als nach oben zeigend definieren, so ist der Scherwinkel gegeben durch

$$\tan \theta = \frac{B_y}{B_x} = \frac{B_{y0}}{B_{x0}} = \frac{\alpha}{l}. \quad (3.55)$$

Der Scherwinkel ist also ein gutes Maß dafür, ob das Feld als Potentialfeld genähert werden darf. Für $\theta = 0$ ist $\alpha = 0$ und das Feld ist ein Potentialfeld. Je größer der Scherwinkel θ , desto schlechter ist die Potentiallösung, bzw. desto notwendiger ist eine Beschreibung durch ein kräftefreies Feld. Abb. 3.35 zeigt die Lösungen. Diese können durch die Proportionalitätsbeziehungen

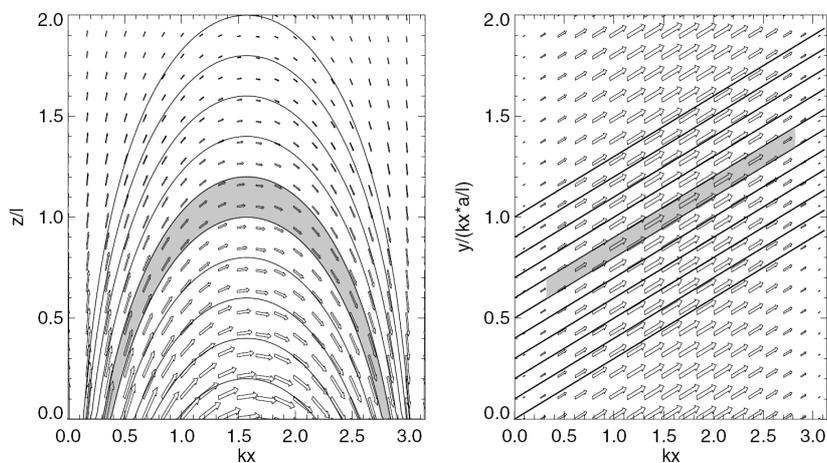


Abbildung 3.35: Lösungen der Gleichungen 3.53 und 3.54. Aus *Aschwanden* (2004).

$$\frac{dx}{B_x} = \frac{dy}{B_y} = \frac{dz}{B_z} \quad (3.56)$$

gefunden werden. Einsetzen der Lösungen gibt

$$y(x) = \frac{\alpha}{l}x + y_0 \text{ und } z(x) = \frac{k}{l} \log[\sin(kx)] + z_0, \text{ wo } k^2 - l^2 - \alpha^2 = 0. \quad (3.57)$$

Übung 3.10 Zeigen Sie dies!

3.3.3 Ein einfaches Dynamo-Modell

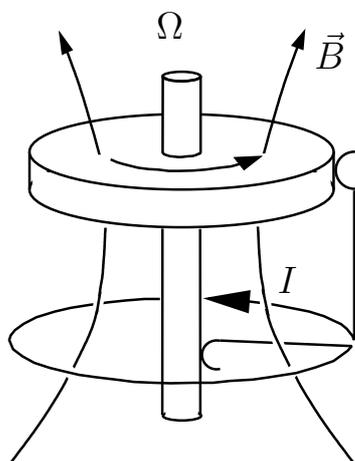


Abbildung 3.36: Der homopolare Dynamo zeigt auf einfache Weise die wichtigen Eigenschaften eines Dynamos: Die axiale Symmetrie wird durch den Draht gebrochen, die differentielle Rotation erfolgt am Rande der rotierenden Scheibe und beim elektrischen Kontakt mit der Achse.

magnetfeld \vec{B} bzw. einen schwachen magnetischen Feldfluss Φ über die Scheibe, sofern diese nicht ein guter Leiter ist (denn sonst würde er das Magnetfeld ausschließen). Dann gilt

$$\Phi = M I, \quad (3.58)$$

wo M die Gegen-Induktivität zwischen der Drahtschleife und der Scheibe bedeutet. Die Ladungsträger in der Scheibe spüren die Lorentz-Kraft, welche für positive Ladungen nach außen wirkt und auf diese Weise den Strom I erzeugt. Je nach Widerstand der Anordnung R kann diese zu einem zunehmenden oder abnehmenden Magnetfeld führen. Die erforderliche Lorentz-Kraft ist auf die Rotation der Scheibe zurückzuführen. Man kann es auch so betrachten, dass sie zu einem elektrischen Potential $\varphi = \Omega\Phi/(2\pi)$ führt, denn $\int dr F/q = \varphi$, wo $F = q \cdot \Omega \cdot r \cdot B = q \cdot \Omega \cdot \Phi/\pi r^2$. Folglich gilt $\varphi = (\Omega\Phi)/(2\pi)$, was genau der Induktionsgleichung für den Strom $I(t)$ entspricht:

$$L \frac{dI}{dt} + R I = M \frac{\Omega}{2\pi} I. \quad (3.59)$$

Wenn wir das Magnetfeld der Erde, der Sonne und vieler Planeten als Folge eines Dynamos, also einer speziellen Konfiguration von Zirkulationsmustern und Magnetfeldern, auffassen, so müssen wir die Inversionen des irdischen Magnetfeldes und des solaren magnetischen Zyklus eine Konsequenz einer Änderung des internen Zirkulationmusters der Erde oder der Sonne interpretieren. Die Erzeugung eines Magnetfeldes durch einen solchen Prozess wird "Dynamo" genannt, die dahinterstehende Theorie heißt "Dynamo-Theorie". Wir geben hier nur eine kurze Einführung in die wesentlichen Aspekte.

Eines der intuitiv klarsten Beispiele für die Wirkungsweise eines Dynamos wurde durch *Bullard* (1955) entwickelt und ist in Abb. 3.36 gezeigt. Sein homopolarer Dynamo besteht ausschließlich aus Festkörpern. Eine feste Kupferscheibe rotiert mit einer Winkelgeschwindigkeit Ω um ihre Symmetrieachse. Ein Draht ist über einen Schleifkontakt mit der Scheibe und zur Systemachse über einen schlau ausgedachten Pfad hin verbunden. Wir werden gleich sehen, dass dieses System zu einem Anwachsen des Magnetfeldes führen kann. Dazu nehmen wir an, dass ein remanenter Strom I durch Draht und Scheibe (also durch die Schleife) fließe. Dieser Strom erzeugt ein schwaches Ma-

Diese hat die Lösung

$$I(t) = I_0 \cdot e^{\left(\frac{M\Omega}{2\pi} - R\right)t}, \quad (3.60)$$

und kann eine wachsende oder fallende Funktion der Zeit sein, je nach Vorzeichen des Exponenten $\frac{M\Omega}{2\pi} - R$. Ist der Widerstand R kleiner als $\frac{M\Omega}{2\pi}$, so wächst der Strom I und damit auch das Magnetfeld B mit der Zeit. Anders ausgedrückt, ist Ω groß genug, d. h. rotiert der Körper schnell genug, so wird diese Rotation eine Instabilität des Wachstums des Stromes I zulassen, die zu einer Zunahme von B führt.

Natürlich ist dieses einfache Beispiel noch sehr verschieden von einem rotierenden flüssigen Körper, es kann aber dennoch zwei wesentliche Aspekte eines jeden Dynamos aufzeigen:

- Jeder Dynamo erfordert eine differentielle Rotation. Dies ist hier sichtbar an den Schleifkontakten am Rand der Scheibe und an der Achse.
- Ein Dynamo ist asymmetrisch gegenüber Spiegelungen, d. h. in diesem Bild, dass Ω parallel zu I ist. In einer symmetrischen Situation wäre Ω anti-parallel zu I .

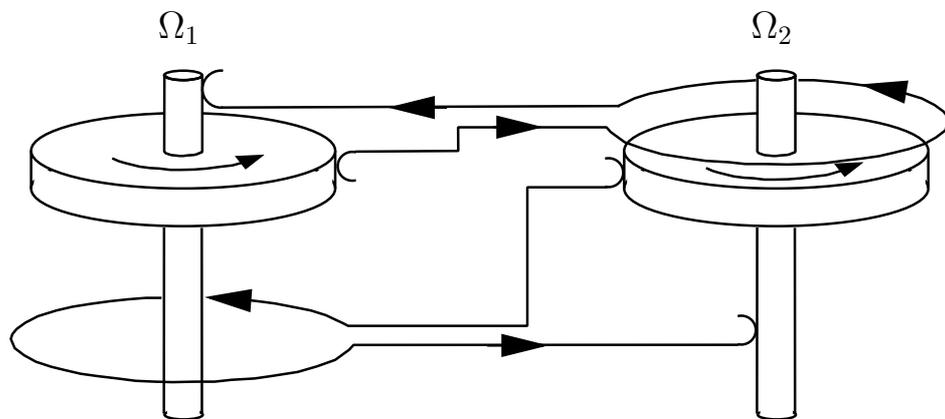


Abbildung 3.37: Der Geodynamo von Rikitake zeigt auf einfache Art und Weise die Eigenschaften gekoppelter Dynamos: Die Kopplung führt zu nicht-linearen Termen in den dynamischen Gleichungen, welche ein chaotisches Gesamtsystem zur Folge hat.

Eine einfache Kombination von zwei homopolaren Dynamos erlaubt es, die Umpolungen des Magnetfeldes der Erde oder der Sonne qualitativ zu reproduzieren. Der Geodynamo von Rikitake in Abb. 3.37 ist ein solches Beispiel. Mathematisch wird es beschrieben durch

$$\begin{aligned} L \frac{dI_1}{dt} + RI_1 &= M\Omega_1 I_2, \\ L \frac{dI_2}{dt} + RI_2 &= M\Omega_2 I_1, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C \frac{d\Omega_1}{dt} &= G - MI_1 I_2, \\ C \frac{d\Omega_2}{dt} &= G - MI_1 I_2, \end{aligned} \quad (3.61)$$

wo C das Trägheitsmoment der Scheiben um ihre Achsen und G das auf die Scheiben angewendete Drehmoment ist. Die Nicht-linearität tritt in den beiden unteren Gleichungen auf.

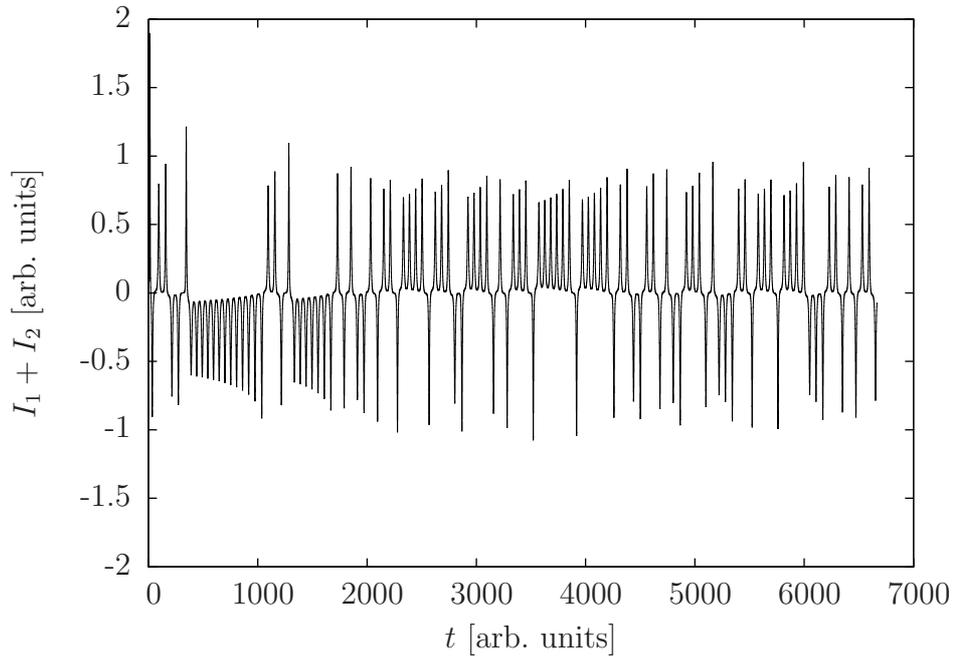


Abbildung 3.38: Der Geodynamo von Rikitake zeigt das erwartete chaotische Verhalten. Die Richtung des Gesamtstroms wechselt “unvorhersehbar”, dazwischen oszilliert der Strom semi-periodisch zwischen stark und schwach. Die Bedingungen für diese Abbildungen waren: $I_1 = 0.9$; $I_2 = 0.2$; $\Omega_1 = 1.05$; $\Omega_2 = 1.0$; $\dot{I}_1 = .51$; $\dot{I}_2 = .1$; $\dot{\Omega}_1 = .1$; $\dot{\Omega}_2 = .001$ und $R/L = .1$; $G/C = 0.01$; $\mu/C = 0.5$.

Der Satz von Cowling

Der Satz von Cowling geht auf T. G. Cowling 1933 zurück. Er besagt, dass es keinen axialsymmetrischen Dynamo geben kann. Wir beweisen ihn hier, wobei einige Schritte als Übungen formuliert sind.

Weil es sich um ein axialsymmetrischen Problem handeln soll, führen wir alle Rechnungen in Zylinderkoordinaten (ρ, θ, z) durch. Wegen der Zylindersymmetrie gilt dann auch $\partial/\partial\theta = 0$. Vektoroperatoren in Zylinderkoordinaten sind im Anhang B.2 gegeben. Ferner nehmen wir an, das Plasma sei inkompressibel, d. h. $\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0$.

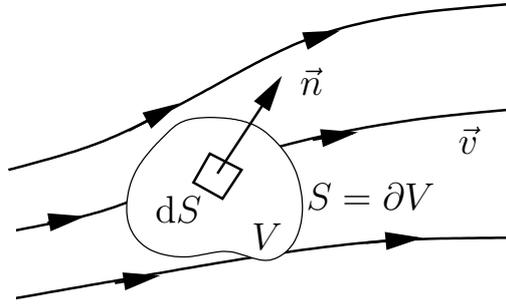


Abbildung 3.39: Ein sich mit dem Medium mitbewegtes Volumen V sei durch seinen Rand $S = \partial V$ gegeben und wird sich bei der Mitbewegung deformieren.

Übung 3.11 Zeigen Sie, dass die Inkompressibilität eines Mediums bedeutet, dass $\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0$. Betrachten Sie dazu ein Volumen V einer Flüssigkeit, welches sich mit der Flüssigkeit mitbewegt (siehe Abb. 3.39). Betrachten Sie dazu die Veränderung des Volumens, ΔV , die in einer Zeit Δt aufgrund der Verschiebung des Oberflächenelementes dS entsteht. Integrieren Sie anschließend über das ganze Volumen.

$$\Delta V = (\vec{v} \cdot \Delta t) \cdot \vec{n} dS = (\vec{v} \Delta t) d\vec{S}.$$

Wir unterteilen das Magnetfeld und das Geschwindigkeitsfeld in poloidale und toroidale Komponenten:

$$\vec{B} = \vec{B}_p + \vec{B}_t, \quad \vec{v} = \vec{v}_p + \vec{v}_t,$$

wo p und t für die poloidale und toroidale Komponente steht. Dabei muss gelten

$$\vec{B}_p = (B_{p\rho}, 0, B_{pz}), \quad \vec{B}_t = (0, B_{t\theta}, 0), \quad (3.62)$$

$$\vec{v}_p = (v_{p\rho}, 0, v_{pz}), \quad \vec{v}_t = (0, v_{t\theta}, 0). \quad (3.63)$$

Wir definieren nun die Stromfunktionen Ψ und Φ für die gilt:

$$\vec{B} \cdot \vec{\nabla} \Psi = 0, \quad \text{und} \quad \vec{v} \cdot \vec{\nabla} \Phi = 0.$$

Damit können die poloidalen Komponenten geschrieben werden als

$$\vec{B}_p = \frac{1}{\rho} (\vec{\nabla} \Psi \times \hat{\theta}), \quad (3.64)$$

$$\vec{v}_p = \frac{1}{\rho} (\vec{\nabla} \Phi \times \hat{\theta}), \quad (3.65)$$

wo $\hat{\theta}$ der Einheitsvektor in Richtung θ bedeute. Die toroidalen Komponenten schreiben wir vorerst als

$$\vec{B}_t = B_t(\rho, \theta, z) \hat{\theta}, \quad \text{und} \quad \vec{v}_t = v_t(\rho, \theta, z) \hat{\theta}.$$

Das Kreuz- oder Vektorprodukt ist in allen rechtshändigen und orthogonalen Koordinatensystemen gegeben durch

$$\vec{v} \times \vec{w} \doteq \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ v_i & v_j & v_k \\ w_i & w_j & w_k \end{vmatrix}. \quad (3.66)$$

Dies gilt auch in Zylinderkoordinaten (sie sind orthogonal und rechtshändig).

Übung 3.12 Berechnen Sie so \vec{B}_p und \vec{v}_p . Resultat

$$\vec{B}_p = \frac{1}{\rho} (\partial_\rho \Psi \hat{z} - \partial_z \Psi \hat{\rho}) \quad (3.67)$$

$$\vec{v}_p = \frac{1}{\rho} (\partial_\rho \Phi \hat{z} - \partial_z \Phi \hat{\rho}) \quad (3.68)$$

Damit gilt dann automatisch $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$ und $\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0$.

Übung 3.13 Zeigen Sie dies!

In einem Dynamo soll das Magnetfeld durch Ströme im Inneren entstehen. Damit dies geschieht, fordern wir von den Stromfunktionen

$$\Psi \sim \frac{1}{r} \text{ für } r \longrightarrow \infty, \quad (3.69)$$

wo $r = \sqrt{\rho^2 + z^2}$. Um Bruchstriche zu sparen, schreiben wir das Ohmsche Gesetz leicht um,

$$\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B} = \eta \vec{j}, \quad (3.70)$$

wo η die inverse Leitfähigkeit, bzw. die 'Resistivität' ist. Für die toroidale Komponente gilt

$$\vec{E}_t + (\vec{v}_p \times \vec{B}_p) \hat{\theta} = \eta \vec{j}_t. \quad (3.71)$$

Diese Gleichung wollen wir nun Term für Term analysieren. Den ersten Term \vec{E}_t schreiben wir mit Hilfe des Faradayschen Induktionsgesetzes um indem wir die Rotation davon bestimmen,

$$\vec{\nabla} \times \vec{E}_t = -\dot{\vec{B}}_p,$$

also

$$\begin{pmatrix} -\frac{\partial E_t}{\partial z} \\ 0 \\ \frac{1}{\rho} \frac{\partial(\rho E_t)}{\partial \rho} \end{pmatrix} = -\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} 1 \\ \rho \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{\partial \Psi}{\partial z} \\ 0 \\ \frac{\partial \Psi}{\partial \rho} \end{pmatrix}. \quad (3.72)$$

Die $\hat{\rho}$ -Komponente zeigt, dass

$$E_t = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \Psi}{\partial t}. \quad (3.73)$$

Der zweite Term von Glg. 3.71 lautet

$$\vec{v}_p \times \vec{B}_p = \begin{vmatrix} \hat{\rho} & \hat{\theta} & \hat{z} \\ -\partial_z \Phi & 0 & \partial_\rho \Phi \\ -\partial_z \Psi & 0 & \partial_\rho \Psi \end{vmatrix} \frac{1}{\rho^2} = \frac{1}{\rho^2} (\partial_\rho \Psi \partial_z \Phi - \partial_\rho \Phi \partial_z \Psi).$$

Der dritte Term aus Glg. 3.71 lässt sich über das Ampèresche Gesetz umformen. Man erhält für die Stromdichte

$$\vec{j}_t = \frac{-1}{\mu_0 \rho} \left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial \rho^2} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \Psi}{\partial \rho} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} \right) \hat{\theta}.$$

Übung 3.14 Zeigen Sie dies!

Wir setzen alles in Glg. 3.71 ein und multiplizieren mit $-\rho$

$$\partial_t \Psi - \frac{1}{\rho} (\partial_\rho \Psi \partial_z \Phi - \partial_\rho \Phi \partial_z \Psi) = \frac{\eta}{\mu_0} \left(\partial_\rho^2 \Psi - \frac{1}{\rho} \partial_\rho \Psi + \partial_z^2 \Psi \right). \quad (3.74)$$

Diese Gleichung wird nun über das Volumen integriert. Das Volumenelement in Zylinderkoordinaten lautet $dV = \rho \, d\rho \, d\theta \, dz$. Mit $(\partial_t \Psi) \Psi = (1/2) \partial_t \Psi^2$ erhalten wir

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int \Psi^2 dV - \int \int \int d\rho \, d\eta \, dz (\partial_\rho \Psi \partial_z \Phi - \partial_\rho \Phi \partial_z \Psi) \Psi = \\ \frac{\eta}{\mu_0} \int \int \int d\rho \, d\eta \, dz \, \rho \Psi \left(\partial_\rho^2 \Psi - \frac{1}{\rho} \partial_\rho \Psi + \partial_z^2 \Psi \right). \end{aligned} \quad (3.75)$$

Diese Gleichung gibt uns das zeitliche Verhalten des Quadrates der Stromfunktion für das Magnetfeld an. Wächst Ψ^2 mit der Zeit, so ist ein Dynamo möglich, zerfällt Ψ^2 mit der Zeit, so gibt es keinen Dynamo⁶. Um das zeitliche Verhalten zu finden müssen wir also die beiden komplizierten Ausdrücke soweit umformen, bis ersichtlich ist, welches Vorzeichen sie haben.

Wir formen den zweiten Term auf der linken Seite von Glg. 3.75 leicht um,

$$\begin{aligned} -2\pi \int d\rho \int dz \, \Psi \left(\frac{\partial \Psi}{\partial \rho} \frac{\partial \Phi}{\partial z} - \frac{\partial \Phi}{\partial \rho} \frac{\partial \Psi}{\partial z} \right) = -2\pi \int d\rho \int dz \left(\Psi \frac{\partial \Psi}{\partial \rho} \right) \frac{\partial \Phi}{\partial z} - \\ \int d\rho \int dz \left(\Psi \frac{\partial \Psi}{\partial z} \right) \frac{\partial \Phi}{\partial \rho}, \end{aligned}$$

und integrieren partiell, wo die Ausdrücke in runden Klammern jeweils f seien⁷. So erhalten wir für die soeben umgeformte Gleichung

$$-2\pi \left[\int d\rho \left\{ \Psi \frac{\partial \Psi}{\partial \rho} \Phi - \int dz \Phi \frac{\partial}{\partial z} \left(\Psi \frac{\partial \Psi}{\partial \rho} \right) \right\} - \int dz \left\{ \Psi \frac{\partial \Psi}{\partial z} \Phi - \int d\rho \Phi \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\Psi \frac{\partial \Psi}{\partial z} \right) \right\} \right].$$

⁶Eigentlich behandeln wir hier ja erst die poloidale Komponente des Magnetfeldes. Die Aussage ist also nicht ganz richtig. Wir werden aber sehen, dass für die toroidale Komponente eine ganz ähnliche Gleichung gilt, weshalb dies jetzt nicht wirklich falsch ist.

⁷Im Sinne von $\int dx f g' = f g - \int dx f' g$.

Wegen $\Psi(r) \sim 1/r$ für $r \rightarrow \infty$ fallen die beiden ersten Terme in den geschweiften Klammern weg und es überlebt nur noch

$$-2\pi \left[\int d\rho \left(- \int dz \Phi \frac{\partial}{\partial z} \left(\Psi \frac{\partial \Psi}{\partial z} \right) \right) - \int dz \left(- \int d\rho \Phi \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\Psi \frac{\partial \Psi}{\partial z} \right) \right) \right] = 0.$$

Ähnlich behandeln wir den Term auf der rechten Seite von Glg. 3.75,

$$\begin{aligned} \frac{\eta}{\mu_0} \int \int \int d\rho d\theta dz \rho \Psi \left(\partial_\rho^2 \Psi - \frac{1}{\rho} \partial_\rho \Psi + \partial_z^2 \Psi \right) &= \\ &= 2\pi \frac{\eta}{\mu_0} \int \int d\rho dz \rho \Psi \left(\partial^2 \Psi - \frac{1}{\rho} \partial_\rho \Psi + \partial_z^2 \Psi \right) \\ &= 2\pi \frac{\eta}{\mu_0} \left[\int dz \int d\rho \rho \Psi \partial_\rho^2 \Psi - \int dz \int d\rho \Psi \partial_\rho \Psi + q \right. \\ &\quad \left. + \int d\rho \int dz \rho \Psi \partial_z^2 \Psi \right]. \end{aligned} \quad (3.76)$$

Der mittlere Term kann einfach berechnet werden und man erhält

$$\int dz \int d\rho \Psi \partial_\rho \Psi = 0. \quad (3.77)$$

Übung 3.15 Zeigen Sie dies!

Damit bleiben nur noch die beiden anderen Terme übrig. Den ersten kann man schreiben als

$$\begin{aligned} \int dz \int d\rho \rho \Psi \partial_\rho^2 \Psi &= \int dz \left[\rho \Psi \partial_\rho \Psi - \int d\rho \partial_\rho (\rho \Psi) \partial_\rho \Psi \right] \\ &= 0 - \int dz \int d\rho \left[\Psi \partial_\rho \Psi + \rho (\partial_\rho \Psi)^2 \right] \\ &= - \int dz \int d\rho \rho (\partial_\rho \Psi)^2, \end{aligned}$$

wo der letzte Schritt wegen Glg. 3.77 gilt. Den zweiten Term können wir genauso umschreiben,

$$\begin{aligned} \int d\rho \int dz \rho \Psi \partial_z^2 \Psi &= \int d\rho \rho \Psi \partial_z \Psi - \int d\rho \int dz \partial_z (\rho \Psi) \partial_z \Psi \\ &= - \int d\rho \int dz \partial_z (\rho \Psi) \partial_z \Psi \\ &= - \int d\rho \left[\int dz (\partial_z \rho) \partial_z \Psi + \int dz \rho (\partial_z \Psi)^2 \right], \end{aligned}$$

weil $\partial_z \rho = 0$. Damit erhalten wir für Glg. 3.76

$$-2\pi \frac{\eta}{\mu_0} \int \int \rho \left[(\partial_\rho^2 \Psi) + (\partial_z \Psi)^2 \right] dz d\rho.$$

Also erhalten wir für der Ausdruck für die toroidale Komponente des Ohmschen Gesetzes (Glg. 3.75)

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int \Psi^2 dV = -2\pi \frac{\eta}{\mu_0} \int \int \rho \left[(\partial_\rho \Psi)^2 + (\partial_z \Psi)^2 \right] dz d\rho,$$

bzw.

$$\frac{d}{dt} \int \Psi^2 dV = -\frac{\eta}{\mu_0} \int |\vec{\nabla} \Psi|^2 dV \quad (3.78)$$

weil gemäß der zylindersymmetrischen Annahme alle Ableitungen nach θ , ∂_θ , verschwinden.

Glg. 3.78 besagt, dass die poloidale Stromfunktion Ψ wegen der Resistivität $\eta > 0$ mit der Zeit gegen Null zerfällt und so verschwindet. Damit zerfällt auch das poloidale Magnetfeld, \vec{B}_p , und wir sehen, dass ein poloidales Feld \vec{B}_p nicht durch einen zylindersymmetrischen Dynamo erhalten oder gar aufgebaut werden kann.

Wie steht es denn mit dem toroidalen Feld \vec{B}_t ? Wir haben soeben gesehen, dass ein poloidales Feld zerfällt und nehmen nun an, wir hätten nur noch ein rein toroidales Feld, was übriggeblieben sei. Wir wenden nun auf das Ohmsche Gesetz der Rotationsoperator an,

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \times \vec{E} + \vec{\nabla} \times (\vec{v} \times \vec{B}) &= \vec{\nabla} \times (\eta \vec{j}), \\ -\partial_t \vec{B}_t + \vec{\nabla} \times (\vec{v}_p \times \vec{B}_t) &= \vec{\nabla} \times (\eta \vec{j}_p), \end{aligned}$$

weil ja $\vec{B}_p = 0$. Mit dem Ampèreschen Gesetz ersetzen wir die Stromdichte durch $\vec{\nabla} \times \vec{B}/\mu_0$ und erhalten so

$$-\partial_t \vec{B}_t \vec{\nabla} \times (\vec{v}_p \times \vec{B}_t) \cdot \hat{\theta} = -\frac{\eta}{\mu_0} \Delta (\vec{B}_t \hat{\theta}) \cdot \hat{\theta}. \quad (3.79)$$

Die rechte Seite ergibt ausgewertet

$$\Delta (\vec{B}_t \hat{\theta}) \cdot \hat{\theta} = \partial_\rho^2 B_t + \frac{1}{\rho} \partial_\rho B_t + \partial_z^2 B_t - \frac{B_t}{\rho^2}, \quad (3.80)$$

wo wir die Zylindersymmetrie ausgenutzt haben $\partial_\theta = 0$. Als nächstes berechnen wir das Kreuzprodukt

$$\vec{v}_p \times \vec{B}_t = \begin{vmatrix} \hat{\rho} & \hat{\theta} & \hat{z} \\ -\frac{1}{\rho} \partial_z \Phi & 0 & \frac{1}{\rho} \partial_\rho \Phi \\ 0 & B_t & 0 \end{vmatrix} = -\frac{1}{\rho} B_t \partial_\rho \Phi \hat{\rho} - \frac{1}{\rho} (\partial_z \Phi) \vec{B}_t \hat{z} \quad (3.81)$$

und bestimmen davon die toroidale Komponente der Rotation,

$$\vec{\nabla} \times (\vec{v}_p \times \vec{B}_t) \cdot \hat{\theta} = \partial_\rho \left(\frac{B_t}{\rho} \partial_z \Phi \right) - \partial_z \left(\frac{B_t}{\rho} \partial_\rho \Phi \right). \quad (3.82)$$

Mit den soeben erhaltenen Resultaten Glg. 3.80 und Glg. 3.82 wird die Ausgangsgleichung Glg. 3.79 zu

$$-\partial_t \vec{B}_t + \partial_\rho \left(\frac{B_t}{\rho} \partial_z \Phi \right) - \partial_z \left(\frac{B_t}{\rho} \partial_\rho \Phi \right) = -\frac{\eta}{\mu_0} \left(\partial_\rho^2 B_t + \frac{1}{\rho} \partial_\rho B_t + \partial_z^2 B_t - \frac{B_t}{\rho^2} \right). \quad (3.83)$$

Als nächstes führen wir eine Variablentransformation durch

$$B_t = \rho\chi$$

und erhalten

$$\begin{aligned} \partial_t\chi - \frac{1}{\rho}(\partial_\rho\chi\partial_z\Phi - \partial_z\chi\partial_\rho\Phi) &= \frac{\eta}{\mu_0} \frac{1}{\rho} \left(\partial_\rho^2(\rho\chi) + \frac{1}{\rho}\partial_\rho(\rho\chi) + \partial_z^2(\rho\chi) - \frac{\chi}{\rho} \right), \\ &= \frac{\eta}{\mu_0} \left(\partial_\rho^2\chi + \frac{3}{\rho}\partial_\rho\chi + \partial_z^2\chi \right). \end{aligned}$$

Ählich wie bei Gleichung 3.74 für die Stromfunktion des Magnetfeldes, multiplizieren wir nun wieder mit χ und integrieren über das gesamte Volumen.

$$\int \chi \partial_t\chi dV = \int \frac{\chi}{\rho} (\partial_\rho\chi\partial_z\Phi - \partial_z\chi\partial_\rho\Phi) + \int dV \frac{\eta\chi}{\mu_0} \left(\partial_\rho^2\chi + \frac{3}{\rho}\partial_\rho\chi + \partial_z^2\chi \right). \quad (3.84)$$

Die Rechnungen, die nun durchgeführt werden müssen sind identisch mit den bereits für den poloidalen Fall durchgeführten. Der mittlere Term im zweiten Integral rechts verschwindet (Glg. 3.77 und wir erhalten wieder eine Gleichung der Form

$$\frac{d}{dt} \int \chi^2 dV = -2 \frac{\eta}{\mu_0} \int |\vec{\nabla}\chi|^2 dV.$$

Dies bedeutet, dass auch das toroidale Feld wegen der Resistivität $\eta > 0$ zu Null hin zerfällt.

Damit ist der Beweis des Satzes von Cowling abgeschlossen - es gibt keinen axialsymmetrischen Dynamo.

Helizität

Ist eine Magnetfeldkonfiguration wie ein Seil verdreht, das Feld "dreht sich um sich selber", so hat sie eine sog. **Helizität**, bzw. **magnetische Helizität**. Ein links-gedrehtes Seil hat negative, ein rechts-gedrehtes positive Helizität. Formal ist die Helizität definiert als

$$H \doteq \int_V \vec{A} \cdot \vec{B} d^3r, \quad (3.85)$$

wo \vec{B} die magnetische Feldstärke, V das Volumen und $\vec{A} = \vec{\nabla} \times \vec{B}$ das Vektorpotential von \vec{B} ist. Diese Größe ist ein Analogon zur Helizität in der Hydrodynamik, also von bewegten Flüssigkeiten

$$H_h \doteq \int_V \vec{u} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{u}) d^3r, \quad (3.86)$$

wo \vec{u} die Geschwindigkeit ist.

3.3.4 Moderne Dynamo Theorie

Die Maxwellgleichungen für langsam veränderliche elektrische Felder, wie wir sie auf der Sonne erwarten lauten

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= 0, \\ \vec{\nabla} \times \vec{B} &= \mu \vec{j},\end{aligned}\quad (3.87)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad (3.88)$$

wo wir den Verschiebungsstrom vernachlässigt haben. In einem nicht-relativistischen Plasma gilt das Ohm'sche Gesetz in der Form

$$\vec{j} = \sigma (\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}). \quad (3.89)$$

Mit dieser Gleichung kann man nun einfach die Induktionsgleichung herleiten

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \vec{\nabla} \times (\vec{v} \times \vec{B}) - \vec{\nabla} \times \left(\frac{1}{\mu \sigma} \vec{\nabla} \times \vec{B} \right). \quad (3.90)$$

Die Größe $\eta = 1/(\mu\sigma)$ heißt **magnetische Diffusivität** weil Glg. 3.90 für $\vec{v} = 0$ eine Diffusionsgleichung wird. Das Wachstum des Magnetfeldes wird also durch die beiden Terme auf der rechten Seite bestimmt. Überwiegt der erste (der Induktionsterm), so wächst das Magnetfeld, überwiegt der zweite (der Zerfallsterm), nimmt es ab. Das Verhalten in den beiden Grenzfälle kann größenordnungsmäßig einfach abgeschätzt werden, indem wir $\vec{\nabla}$ durch $1/l$ und alle vektoriellen Größen durch ihre Beträge ersetzen. Das Verhältnis von Induktions- zu Zerfallsterm ist dann

$$R_m \doteq \frac{vl}{\eta}, \quad (3.91)$$

die sog. **magnetische Reynoldszahl**.

Wir unterteilen die turbulenten Bewegungen im Sonneninneren in einen gemittelten und einen fluktuierenden Anteil,

$$\vec{B} = \mathbf{B} + \mathbf{b}, \quad \text{und} \quad \vec{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}, \quad (3.92)$$

wo \mathbf{B} das gemittelte Magnetfeld bedeute, \mathbf{b} der fluktuierende Anteil und \mathbf{v} und \mathbf{u} die Analoga für die Geschwindigkeit sind. Mittelung über die fluktuierenden Anteile ergibt einen verschwindenden Wert $\langle \mathbf{b} \rangle = 0$ und $\langle \mathbf{u} \rangle = 0$. Wir setzen nun die Gleichungen 3.92 in die Induktionsgleichung 3.90 ein und erhalten

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \vec{\nabla} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B} + \langle \mathbf{u} \times \mathbf{b} \rangle - \eta \vec{\nabla} \times \mathbf{B}) \quad (3.93)$$

und

$$\frac{\partial \mathbf{b}}{\partial t} = \vec{\nabla} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{b} - \mathbf{u} \times \mathbf{B} + \mathbf{u} \times \mathbf{b} - \langle \mathbf{u} \times \mathbf{b} \rangle - \eta \vec{\nabla} \times \mathbf{b}). \quad (3.94)$$

Das kritische Element für einen Dynamo enthält Glg. 3.93 mit dem Term $\langle \mathbf{u} \times \mathbf{b} \rangle$, der ein elektrisches Feld $\mathbf{E} = \langle \mathbf{u} \times \mathbf{b} \rangle$ beschreibt. Ist er genügend groß, kann er jeden diffusiven Term $\eta \vec{\nabla} \times \mathbf{B}$ übertreffen und das gemittelte Magnetfeld \mathbf{B} muss mit der Zeit wachsen. Das Problem ist natürlich, dass \mathbf{E} nicht bekannt ist. Es muss aus $\mathbf{E} = \langle \mathbf{u} \times \mathbf{b} \rangle$ berechnet werden, indem dort die Ausdrücke für \mathbf{b} und \mathbf{u} eingesetzt werden. Diese sind aber nicht bekannt.

Allerdings zeigt eine sorgfältige Untersuchung⁸ von Glg. 3.94, dass zwischen \mathbf{b} und \mathbf{B} eine lineare Beziehung herrschen muss und folglich auch zwischen \mathbf{E} und \mathbf{B} . Wir können diese als Reihenentwicklung schreiben

$$\mathbf{E}_i = \alpha_{ij} \mathbf{B}_j + \beta_{ijk} \frac{\partial \mathbf{B}_j}{\partial x_k} + \dots \quad (3.95)$$

Sind die Terme zweiter Ordnung in Glg. 3.94 vernachlässigbar, also die Kreuzprodukte $\mathbf{u} \times \mathbf{b} - \langle \mathbf{u} \times \mathbf{b} \rangle$, so kann ein Ausdruck für \mathbf{b} gefunden werden, mit dem \mathbf{E} bestimmt werden kann. Wir definieren als l und τ typische räumliche und zeitliche Skalen, u soll ein typischer Wert für \mathbf{u} sein (also z. B. seine Standardabweichung). Die genannten Kreuzprodukte können vernachlässigt werden, wenn gilt

$$\frac{ul}{\eta} \ll 1 \quad \text{bzw.} \quad \frac{u\tau}{l} \ll 1. \quad (3.96)$$

Im ersten Fall sind die Kreuzprodukte klein im Vergleich zu $\eta \vec{\nabla} \times \mathbf{b}$, im zweiten kann man sie im Vergleich zu $\partial \mathbf{b} / \partial t$ vernachlässigen. Der erste Fall entspricht einer kleinen magnetischen Reynoldszahl.

Übung 3.16 *Schätzen sie ab, ob eine der Bedingungen aus Glg. 3.96 auf der Sonne erfüllt ist.*

Wie aus Übung 3.16 klar wird, sind die Bedingungen für eine Vernachlässigung dieser Terme auf der Sonne nicht erfüllt. Trotzdem lohnt es sich, sie hier zu vernachlässigen - und auch gleich noch den Term $\mathbf{v} \times \mathbf{b}$ und wegen der hohen Leitfähigkeit auch $\eta \vec{\nabla} \times \mathbf{b}$ in Glg. 3.94. Dann kann eine Lösung

$$\mathbf{b} = \int_{-\infty}^t \vec{\nabla} \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B}) dt' \quad (3.97)$$

gefunden werden. Damit kann nun gezeigt werden, dass

$$\mathbf{E} = \alpha \mathbf{B} - \beta \vec{\nabla} \times \mathbf{B} + \dots \quad (3.98)$$

Setzen wir diesen Ausdruck in die Gleichung für die Entwicklung des gemittelten Feldes (Glg. 3.93) ein, so erhalten wir

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \vec{\nabla} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B} + \alpha \mathbf{B} - \eta_t \vec{\nabla} \times \mathbf{B}), \quad (3.99)$$

⁸Ich folge hier weitgehend der Argumentation von *Stix* (2002).

wo

$$\eta_t = \eta + \beta. \quad (3.100)$$

Gleichung 3.99 bestimmt das mittlere Feld \mathbf{B} , genau wie es die Induktionsgleichung (3.90) tat. Nur können wir jetzt explizit verfolgen, welche *gemittelten* Terme zu einem Anwachsen des Feldes und welche zu einem Abklingen führen. Die Kenntnis der statistischen Eigenschaften der fluktuierenden Größen steckt ausschließlich in α und β . Zur Bestimmung des mittleren Feldes ist also “nur” noch die Kenntnis von α und β erforderlich. Die Erhöhung der Diffusivität $\eta_t = \eta + \beta$ hat ein schnelleres Abklingen des Feldes zur Folge, welches aber durch den zusätzlichen α Term mehr als aufgewogen werden kann. Mit Glg. 3.97 kann gezeigt werden, dass

$$\alpha = -\frac{1}{3} \int_0^\infty \langle \mathbf{u}(t) \cdot (\vec{\nabla} \times \mathbf{u}(t-t')) \rangle dt' \quad (3.101)$$

und

$$\beta = \frac{1}{3} \int_0^\infty \langle \mathbf{u}(t) \cdot \mathbf{u}(t-t') \rangle dt' \quad (3.102)$$

ist.

Der wesentliche Punkt hier ist der neue α -Term, auch α -Effekt genannt. Er führt zu einem Feld-parallelen Strom \vec{j} parallel zu \mathbf{B} , der wiederum ein Magnetfeld hervorruft, welches nach Faraday’schem Gesetz poloidal sein muss. Wir haben also den Ring geschlossen:

$$B_p \xrightarrow{\text{diff. Rot.}} B_t \xrightarrow{\alpha\text{-Effekt}} B_p$$

3.3.5 Der solare Dynamo

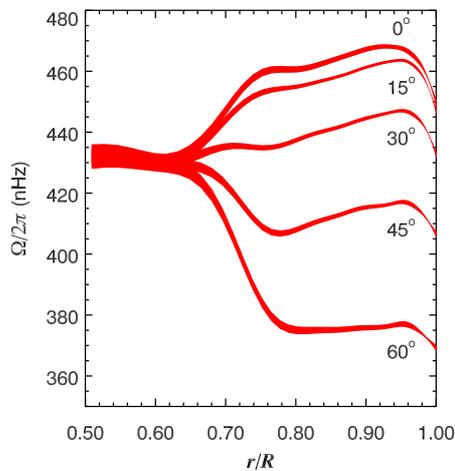


Abbildung 3.40: Differentielle Rotation in der Sonne. Quelle: NSF’s solar Observatory (http://soi.stanford.edu/press-/GONG.MDI_03-00/)

Wo befindet sich denn nun der solare Dynamo? Dazu müssen wir uns noch einmal überlegen, welches die wesentlichen Bestandteile waren. Die differentielle Rotation überführt ein poloidales Magnetfeld in ein toroidales, welches durch den α -Effekt wiederum ein poloidales zur Folge hat. Helioseismologische Messungen von SOHO oder GONG haben gezeigt, dass die differentielle Rotation auf die Konvektionszone der Sonne beschränkt ist, der radiative Kern scheint starr zu rotieren. Abbildung 3.3.5 zeigt die differentielle Rotation in der Sonne und den starr mit-rotierenden Kern. Die Übergangszone, die Tachokline ist

ein Gebiet mit hoher Scherung. Auch die differentielle Rotation ist nicht stationär, sondern vielmehr ein dynamisches Phänomen. Sie beschleunigt und verlangsamt an verschiedenen Orten zu verschiedenen Zeiten. Hier kann ein starkes toroidales Magnetfeld entstehen, welches die bisher untersuchten Eigenschaften alle erfüllt.

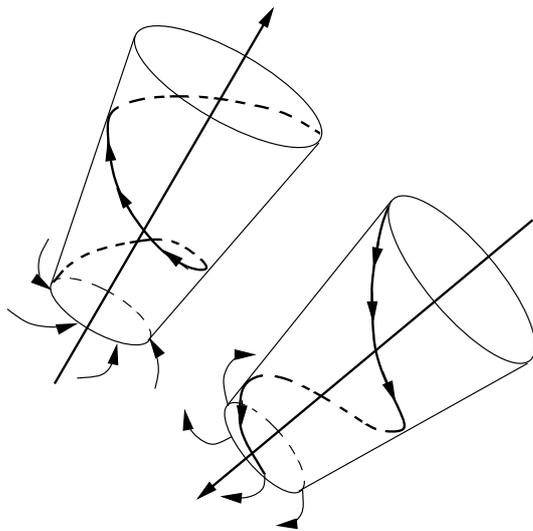


Abbildung 3.41: In auf- und absteigenden Gebieten der Nordhemisphäre erhalten Plasmapakete eine linkshändige (negative) Helizität. Die Divergenz am unteren Ende der absinkenden und die Konvergenz am unteren Ende der aufsteigenden Röhren erzeugen aber eine rechtshändige (positive) Helizität.

Wo entsteht aber nun der α -Effekt? Nach Glg. 3.101 muss er mit der Helizität der Bewegungen in der Sonne verknüpft sein. Wie aus Abb. 3.3.5 klar wird, herrscht in der nördlichen Hemisphäre in der Konvektionszone negative, in der Tachokline positive Helizität. In auf- und absteigenden Gebieten der Nordhemisphäre erhalten Plasmapakete eine linkshändige (negative) Helizität. Die Divergenz am unteren Ende der absinkenden und die Konvergenz am unteren Ende der aufsteigenden Röhren erzeugen aber eine rechtshändige (positive) Helizität. Damit scheint der α -Effekt auch in der Tachokline angesiedelt zu sein, weil nur hier die Helizität geändert werden kann. Eine Abschätzung der Größenordnung von α ist schwierig, in der Literatur sind Werte zwischen wenigen cm/s und 100 m/s zu finden (Stix, 2002).

3.4 Koronale Expansion und Entstehung des Sonnenwindes

3.4.1 Geschichtliches

Die Idee, dass die Sonne einen Strom von geladenen Partikeln emittieren könnte geht auf das Ende des 19. Jahrhundert zurück. So haben z. B. *Fitzgerald* bereits 1892 und 1900 und *Lodge* 1900 vorgeschlagen, dass die magnetischen Stürme auf der Erde durch einen 'Sturm oder eine fliegende Wolke von geladenen Atomen oder Ionen' ausgelöst würden. Sie haben postuliert, dass die Polarlichter durch die 'Konstituenten der Kathodenstrahlen' erzeugt werden, 'indem sie an den polaren Regionen vorbeiziehen'. Sie haben erkannt, dass die Kome-

tenschweife nicht durch elektromagnetische Strahlung erklärt werden können (ganz einfach, weil man durch sie hindurch sieht!), sondern dass man sie durch eine Partikelstrahlung, die z. B. aus Sonnenflecken stammen könnte und eine mittlere Geschwindigkeit von etwa 450 km/s haben müsste. Schließlich haben sie erkannt, dass 'es Hinweise aus Aurorae und magnetischen Stürmen darauf gibt, dass die Erde einen kleinen Schweif hat, der ähnlich wie ein Kometenschweif von der Sonne weg gerichtet ist' (Alles zitiert nach *Dessler* (1967)).

Ähnliche Ideen hat Birkeland 1896 vorgeschlagen und mit Laborarbeiten und einer Expedition untermauert (*Birkeland*, 1896). In 1908 und 1913 hat *Birkeland* die Resultate der Norwegischen Aurora-Expedition 1902 – 1903 publiziert. Diese hat zusammen mit den Arbeiten von *Chapman* (1918, 1919) diesen Ideen zu einer gewissen Popularität verholfen. In der Tat hat Birkeland einen kontinuierlichen Sonnenwind vorgeschlagen (*Dessler*, 1967). Die Vorstellung, dass eine Partikelstrahlung die geomagnetische Aktivität erzeugt war sehr bald etabliertes Gedankengut der 'Geomagnetiker'. Dies wird z. B. belegt durch die Bartels' Definition des K_p -Indexes (*Bartels*, 1949): Der K_p -Index dient dazu, "die sich veränderliche Intensität der solaren Teilchenstrahlung durch ihre geomagnetischen Effekte zu messen".

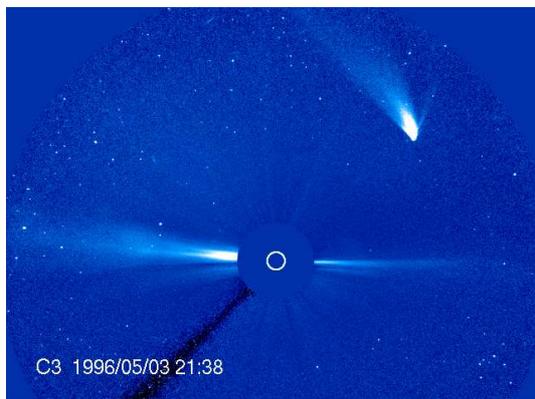


Abbildung 3.42: Komet Hyakute nahe der Sonne. Der breite Staubschweif ist gut sichtbar, der dünne Ionenschweif wird durch den Sonnenwind in die radiale Richtung gedrängt. Die Abweichung von dieser ist auf die Eigenbewegung des Kometen zurückzuführen.

(siehe Seite 71).

Dass Kometenschweife abgelenkt durch den Sonnenwind werden, kann man sehr schön in Abb. 3.4.1 sehen. Der breite Kometenschweif ist der Staubschweif, der dünne ist der Ionenschweif, der durch den Sonnenwind abgelenkt wird. Die Aufnahme stammt von SOHO/LASCO C3.

Unter dem Begriff "interplanetarer Raum" verstehen wir im folgenden den

In diesem historischen Licht gesehen ist das Postulat Biermanns (*Biermann*, 1951, 1953, 1957), nach welchem ein kontinuierlicher Sonnenwind die Kometenschweife ablenkt nicht neu. Biermann hat aber diese Ideen aus der Vergangenheit wieder hervorgeholt und die kontinuierliche Natur des Sonnenwindes betont. Diese Ideen wurden durch die ersten in-situ Messungen durch eine Reihe von russischen (Luna 2, Luna 3 und Venus 3) *Gringauz et al.* (1960); *Gringauz* (1961); *Gringauz et al.* (1967) und amerikanischen (Explorer 10, Mariner 2, and Imp 1) *Bonetti et al.* (1963); *Scherb* (1964); *Snyder* und *Neugebauer* (1964); *Neugebauer* und *Snyder* (1966, 1967); *Ness et al.* (1964) Raumsonden vollends bestätigt (siehe

Raum, den der von der Sonne ausströmende Sonnenwind definiert. Der interplanetare Raum beinhaltet also den Sonnenwind, das mitgeführte Magnetfeld und den in geringen Mengen vorhandenen interplanetaren Staub, wie auch z.B. das Strahlungsfeld der Sonne, die (solare und extrasolare) kosmische Strahlung, interstellare Teilchen, etc. Dies wird oft unter dem Begriff interplanetarisches Medium subsumiert. Die Heliosphäre ist die Kavität, welche durch die Wechselwirkung des Sonnenwindes und der solaren Strahlung mit dem umgebenden lokalen interstellaren Medium (LISM, "local interstellar medium", siehe Unterkapitel 5.1.) entsteht. Wir werden die Ausbildung der Heliosphäre in Unterkapitel 5.2 genauer untersuchen. Vorweg genommen sei, dass der Sonnenwind für die großräumige Strukturierung der Heliosphäre die dominante Rolle spielt, die mikroskopische Struktur der sich am Rand der Heliosphäre bildenden Grenzflächen ist äußerst komplex, weil die dazu beitragenden Größen wie Plasmadruck, Energiedichte im Magnetfeld, in der kosmischen Strahlung etc. alle etwa denselben Betrag aufweisen und so nicht vernachlässigt werden können.

3.5 Der Sonnenwind

Abbildung 3.43 zeigt die Parameter des interplanetaren Mediums bei 1 AE für die Bartelsrotation 2303. Die Parameter wurden durch Instrumente auf der Raumsonde ACE (Advanced Composition Explorer) gemessen und stehen im [www öffentlich zur Verfügung \(www.srl.caltech.edu/ACE/ASC\)](http://www.srl.caltech.edu/ACE/ASC). ACE umfliegt in einem Haloorbit den ersten Lagrangepunkt und ist somit ca. eine astronomische Einheit (AE) von der Sonne entfernt. Das Instrument SWEAP misst Sonnenwindparameter (von oben nach unten: Dichte, Temperatur, Verhältnis α /Protonen, Geschwindigkeit), MAG die Parameter, welche das interplanetare Magnetfeld beschreiben (von oben nach unten: Feldstärke $|B|$ und die beiden Polarwinkel von \vec{B}). Zwei Typen von Sonnenwind können unterschieden werden, der schnelle und der langsame Sonnenwind. Die beiden Typen unterscheiden sich nicht nur durch ihre Geschwindigkeit (zwischen 300 und 400 km/s sowie zwischen 500 und 700 km/s), sondern auch durch andere Merkmale, insbesondere durch ihre Zusammensetzung, was letztlich auf einen anderen Ursprung in der solaren Korona hindeutet. Tabelle 3.1 gibt einen Überblick über durchschnittliche Eigenschaften der beiden Sonnenwindtypen.

Übung 3.17 *Ergänzen Sie in Tabelle 3.1 Impulsfluss, dynamischen Druck und Schallgeschwindigkeit der beiden Sonnenwindtypen.*

3.5.1 Heizung der Korona

Die Annahme einer isothermen Korona hat es erlaubt, ein einfaches Sonnenwindmodell zu entwickeln, welches die grundlegenden Züge der koronalen Expansion beschreibt. Wie aber wird die Korona heißer als die Photosphäre? Dazu muss Energie in der Korona deponiert werden und die Elektronen wie

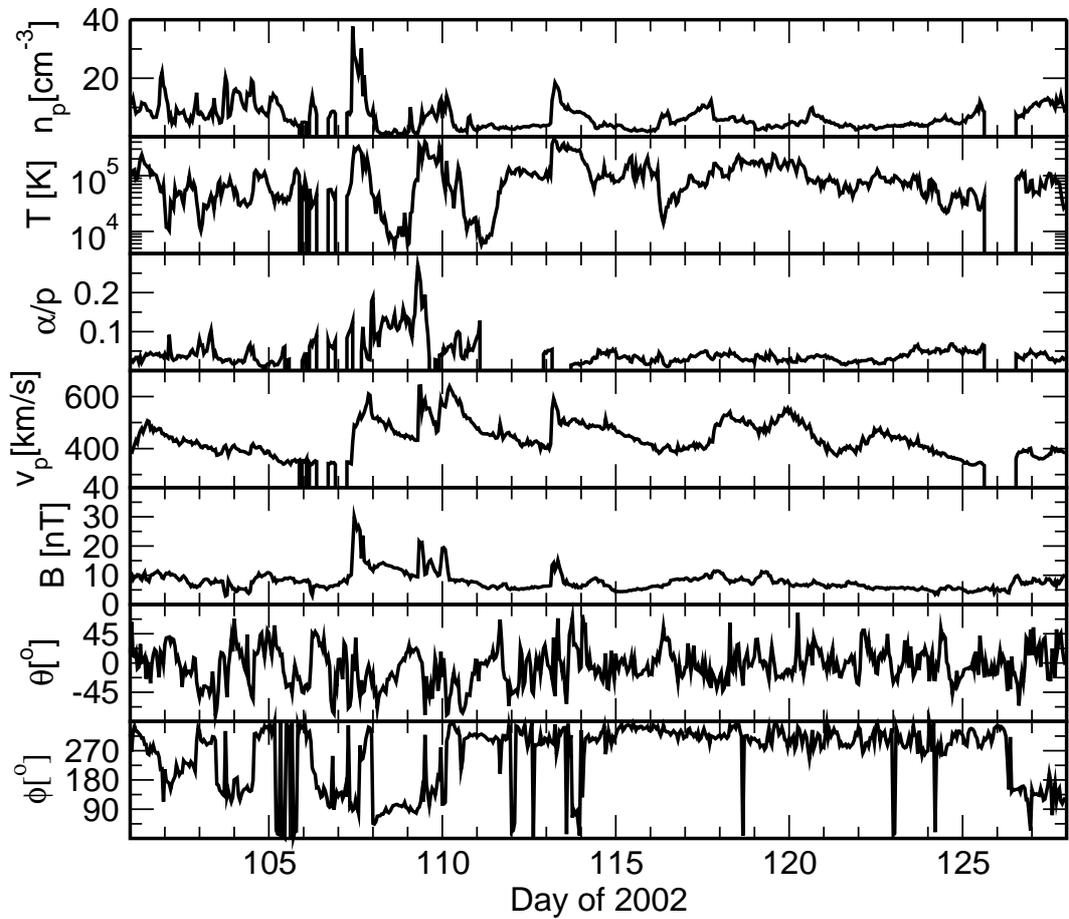


Abbildung 3.43: Parameter des interplanetaren Mediums bei ungefähr 1 astronomischen Einheit Entfernung von der Sonne für Bartelsrotation 2303 (Tag 101, 2002 bis Tag 127, 2002). Von oben nach unten: Dichte der Sonnenwindprotonen, Temperatur der Protonen, Verhältnis der α Teilchen zu Protonen, Protonengeschwindigkeit, Feldstärke $|B|$ und die beiden Polarwinkel der Magnetfeldrichtung in RTN Koordinaten. Quelle: Level II Daten der ACE Mission.

auch die Ionen heizen. Dazu muss in Glg. 3.108 der Term $S(r)$ spezifiziert werden. $S(r)$ wird oft als exponentiell abfallende Funktion angesetzt, obwohl die genaue Natur von $S(r)$ immer noch nicht geklärt ist. Auch wenn verschiedene neue Ansätze erfolgversprechend aussehen, gehört die Heizung der Korona nach wie vor zu den großen Rätseln der Sonnenphysik. Die heute am meisten Erfolg versprechende Idee für die Heizung der Korona ist die Heizung durch die Wechselwirkung von Ionen mit Ionen-Zyklotron Wellen. Das soeben besprochene Modell kann solche Wellen nicht beinhalten, weil es rein hydrodynamisch ist, das Magnetfeld und der Plasmacharakter des Sonnenwindes kommt in den Gleichungen nirgends vor. Ein verbessertes Modell der Koronaheizung und Sonnenwindexpansion muss dieses aber beinhalten, z.B. durch eine magnetohydrodynamische (MHD) oder plasmaphysikalische Beschreibung. Die Grundzüge der

Größe	langsam		schnell		
	Wert	σ	Wert	σ	
v_p	327	15	702	32	km/s
n_p	11.9	4.5	3.9	0.6	cm^{-3}
T_p	3.4	1.5	23	3	10^4 K
T_α	11	8	142	62	10^4 K
n_α/n_p	3.8	1.8	4.8	0.5	%
$n_p v_p^2$					$\text{m}^{-1} \text{s}^{-2}$
$\rho_p v_p^2$					Pa
c_s					km/s

Tabelle 3.1: Statistische Eigenschaften des langsamen und des schnellen Sonnenwindes. Nach *Bame et al.* (1977)

MHD werden im ersten Teil (Plasmaphysik) dieser Vorlesung und in Anhang B behandelt. Die Theorie von Wellen im Plasma wird auch im ersten Teil der Vorlesung und äußerst knapp in Anhang B zusammengestellt.

3.5.2 Ursprung des Sonnenwindes

Der Sonnenwind ist ein (fast?) vollständig ionisiertes Plasma, ein eventueller neutraler Sonnenwind ist experimentell noch nicht niet- und nagelfest nachgewiesen. Er entsteht durch Ladungsaustausch mit neutralen interstellaren Teilchen (Kapitel 5), durch Neutralisation durch Wechselwirkung mit interplanetaren Staubteilchen, oder selten in koronalen Massenauswürfen. Der hohe Ionisationsgrad ist eine Folge des Beschleunigungsprozesses aus der Sonnenatmosphäre heraus durch die Korona in den interplanetaren Raum. Stöße mit dem heißen Elektronengas der Korona ionisieren das Gas vollständig. Aus der Verteilung von Ladungszuständen schwerer Ionen ($Z > 2$) lässt sich die Größenordnung der Elektronentemperatur abschätzen, allerdings ist eine genaue Bestimmung des Temperaturprofils aus solchen Messungen wohl nicht oder nur schwer möglich.

Übung 3.18 *Schätzen Sie ab, welchen Anteil der gesamten von der Sonne abgestrahlten Energie in die Heizung der Korona gesteckt wird.*

Die Photosphäre der Sonne weist eine Temperatur von ca. 5770 K auf. Die ersten Ionisationspotentiale vieler Elemente liegen in der Größenordnung von 10 eV. 10'000 K entsprechen etwa 1 eV. Wenn der Sonnenwind fast vollständig ionisiert ist, bedeutet doch dies, dass die koronalen Elektronen mindestens die 10 eV Energie haben und also wesentlich heißer als ca. 6000 K sein müssen. Wie kann die Korona heißer sein als die Sonnenoberfläche? Oder, salopp ausgedrückt: was hält den Topf am Kochen? In dieser Frage sind in den letzten

Jahren große Fortschritte erzielt worden. Beobachtungen von Emissionslinien von Wasserstoff, Sauerstoff und Magnesium durch das Instrument UVCS (UltraViolet Coronagraph Spectrometer) auf der SOHO (Solar and Heliospheric Observatory, siehe <http://sci.esa.int/home/soho/>.) Raumsonde scheinen den wesentlichen Einfluss von Ionen-Zyklotron-Wellen zu untermauern. Aus der Breite der Emissionslinien kann auf die Temperatur der Ionen geschlossen werden, welche für Protonen bei einigen Millionen Grad Kelvin liegt, für die schweren Ionen aber deutlich über 100 Millionen Grad. Die Massenabhängigkeit der Heizung der einzelnen Ionenspezies ist eine Eigenschaft der Wechselwirkung von Ionen-Zyklotron-Wellen mit Ionen.

3.5.3 Parkermodell

Die Energiequelle für die Beschleunigung des Sonnenwindes muss im solaren Magnetfeld liegen, welches durch den solaren Dynamo erzeugt wird. Wir diskutieren hier ein einfaches Sonnenwindmodell, welches die Grundzüge der Beschleunigung und deren mathematische Behandlung illustriert. Es geht auf *Parker* (1958) zurück, welcher dieses erste "realistische" Modell für den Sonnenwind entworfen hat.

Wir betrachten eine sphärisch symmetrische Korona, welche sich stationär ausbreitet, so dass alle Größen nur von r , nicht aber von der Zeit abhängen. Das expandierende Gas muss die Kontinuitätsgleichung

$$-\frac{\partial \rho}{\partial t} = \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{u}) = 0$$

erfüllen, welche in Kugelkoordinaten lautet

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} (r^2 \rho u) = 0. \quad (3.103)$$

Hier bedeutet r der Abstand von der Sonne, u die Geschwindigkeit und ρ die Dichte. Wir nehmen an, dass u rein radial ist, also keine azimuthalen oder meridionalen Komponenten aufweist. Wir betrachten ein Gasvolumen, welches ein Massenelement dm beinhaltet. Die Kräfte, welche auf das Volumen wirken, sind die Gravitation und der Druckgradient. Die auf den Druckgradienten zurückzuführende Kraft ist einfach zu verstehen. An jedem Ort an der Oberfläche des Volumens greift die Kraft $P d\vec{A}$ an, und wir können über die Oberfläche des Volumens integrieren,

$$\vec{F}_{\text{Druck}} = - \int_{\partial V} d\vec{A} P = - \int dV \vec{\nabla} P, \quad (3.104)$$

wobei $d\vec{A}$ das Flächenelement der Oberfläche des Volumens V , ∂V , bedeutet und die zweite Gleichheit aus dem Satz von Stokes folgt. Die durch den Druck erzeugte Kraft pro Volumeneinheit ist also gleich dem negativen Druckgradienten. Weil auch in der Sonnenatmosphäre der Druck unten höher ist als oben,

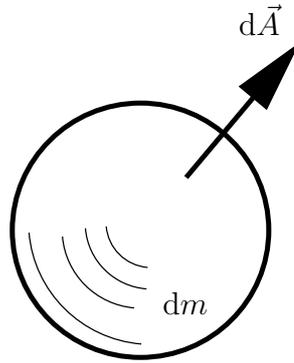


Abbildung 3.44: Gasvolumen in der Sonnenatmosphäre.

erfährt ein Gaspaket einen Auftrieb. In unserer Modellatmosphäre haben wir also nun die folgende Bewegungsgleichung,

$$\rho \frac{d^2 r}{dt^2} = -\frac{G M_{\odot} \rho}{r^2} - \frac{dP}{dr}. \quad (3.105)$$

Damit wird die Dynamik des Sonnenwindes in diesem sehr stark vereinfachten Modell durch den Druckgradienten bestimmt.

Wir wollen den Massefluss von der Sonne weg bestimmen und schreiben diese Gleichung deshalb um in eine Gleichung, welche die Geschwindigkeit explizit enthält. Mit

$$\frac{d^2 r}{dt^2} = \frac{du}{dt} = \frac{du}{dr} \frac{dr}{dt} = u \frac{du}{dr} \quad (3.106)$$

wird Glg. 3.105 zu

$$\rho u \frac{du}{dr} = -\frac{G M_{\odot} \rho}{r^2} - \frac{dP}{dr}. \quad (3.107)$$

Wir haben mit der Kontinuitätsgleichung 3.103 eine Gleichung, welche uns sagt, wie sich der Massenfluss radial verhält. Mit einer Gleichung, welche uns sagt, wie sich die Geschwindigkeit radial verhält, können wir dann auch sagen, wie die Dichte vom Abstand von der Sonne abnimmt. Die Impulserhaltungsgleichung (Glg. 3.107) definiert das Verhalten der Geschwindigkeit bei gegebenem Druckprofil $P(r)$. Wir brauchen also eine weitere Gleichung, welche dieses liefert. In anderen Größen ausgedrückt, ist die Kontinuitätsgleichung eine Gleichung für den Massenfluss, die Bewegungsgleichung eine Gleichung für den Impulsfluss, und die nächste Gleichung in der Hierarchie muss eine Gleichung für den Energiefluss sein. Eine formale Herleitung dieser Hierarchie ist im Appendix A gegeben, wo auch die Gleichungen 3.103 und 3.107 aus der fundamentalen Boltzmann-Gleichung hergeleitet werden. Die Energiegleichung lautet

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left[r^2 \rho u \left(\frac{1}{2} u^2 + \frac{3P}{\rho} \right) \right] = -\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} (r^2 P u) - \rho u \frac{GM_{\odot}}{r^2} + S(r), \quad (3.108)$$

wo $S(r)$ ein Term ist, welcher Energiequellen oder -senken beschreibt, wie z.B. Strahlung oder Wärmeleitung. Mit den Gleichungen 3.103, 3.107 und 3.108 ist das System aber immer noch nicht vollständig beschrieben. Die Massenflussgleichung 3.103 kann nur mit Kenntnis des Impulsflusses gelöst werden. Dieser wird mit Glg. 3.107 beschrieben, welche aber nur mit Kenntnis des Energieflusses, Glg. 3.108, bekannt ist. Hier wird nun Kenntnis eines Quellterms vorausgesetzt, welcher mit einer weiteren Gleichung beschrieben werden könnte. Diese würde aber wiederum die Divergenz des nächsthöheren Geschwindigkeitsmoments voraussetzen, etc. Diese unendliche Reihe von Gleichungen muss irgendwo und irgendwann abgebrochen werden. Eine Möglichkeit dies zu tun besteht darin, den Druck durch eine physikalisch sinnvolle und gut motivierte Beziehung durch die Dichte oder eine andere Größe niedrigerer Ordnung auszudrücken und so das System zu "schließen". Im einfachen Modell, welches wir hier betrachten, geschieht dies durch eine Polytropennäherung,

$$P = P_0 \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^\alpha, \quad (3.109)$$

wo der Polytropenindex $\alpha = 1$ für eine isotherme Korona gilt. Dieser Ansatz macht eine implizite Annahme über den Quellterm $S(r)$, welcher nicht unbedingt der Realität entsprechen muss. Für eine isotherme Korona ist die Temperatur der Korona überall gleich groß. Dies ist gewährleistet, wenn $T = \frac{1}{2}(T_e + T_p)$ überall gleich groß ist. Dann gilt für ein ideales Gas $P = 2nkT$. Damit lassen sich Gleichungen 3.103 und 3.107 umschreiben zu

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} (r^2 n u) = 0 \quad (3.110)$$

und

$$n m u \frac{du}{dr} = -2kT \frac{dn}{dr} - nm \frac{GM_\odot}{r^2}. \quad (3.111)$$

Das erste Integral *need to define this* von Glg. 3.111 ist

$$4\pi n u r^2 = I = \text{const.}, \quad (3.112)$$

welches ausdrückt, dass der Massenfluss durch sonnenzentrierte Kugelflächen immer gleich groß bleibt, unabhängig vom Kugelradius. Wir leiten diesen Ausdruck nach r ab und lösen die entstandene Gleichung nach $\frac{dn}{dr}$ auf, welches wir dann in Glg. 3.111 einsetzen. Nach wenig Arithmetik erhalten wir

$$\frac{1}{u} \frac{du}{dr} \left(u^2 - \frac{2kT}{m} \right) = \frac{4kT}{mr} - \frac{GM_\odot}{r^2}, \quad (3.113)$$

welche das Verhalten von $u(r)$ durch nur einen einzigen Parameter, der Temperatur T , bestimmt. Weil wir die Korona als isotherm angenommen haben, ist $T = \text{const.}$ und folglich ist zur Bestimmung nichts anderes nötig. Wir beschränken uns auf Temperaturen $T < GM_\odot m / (4kr_0)$. Sollten wir T größer

wünschen, könnte r_0 ohne weiteres kleiner gewählt werden. r_0 gibt den kleinsten Radius an, bestimmt also die "Basis" der Korona in diesem einfachen Modell. Die rechte Seite von Glg. 3.113 ist also negativ für $r_0 < r < r_c$, wo

$$r_c = \frac{GM_\odot m}{4kT}, \quad (3.114)$$

der sogenannte kritische Radius ist. Oberhalb dieses Radius ist die rechte Seite von Glg. 3.113 positiv. An der Nullstelle muss entweder

$$u^2(r_c) \doteq u_c^2 = \frac{2kT}{m}, \quad (3.115)$$

oder

$$\left. \frac{1}{u} \frac{du}{dr} \right|_{r=r_c} = 0 \quad (3.116)$$

sein. Wir suchen nun Lösungen der Gleichung 3.113, welche stetig und eindeutig sind. Im Falle, dass Glg. 3.115 zutrifft, darf $\frac{du}{dr}$ das Vorzeichen nicht wechseln und folglich ist die Lösung entweder monoton steigend oder monoton fallend. Im Falle von Glg. 3.116 ändert $u_c^2 - \frac{2kT}{m}$ das Vorzeichen nicht, wohl aber $\frac{du}{dr}$. Diese Lösung erreicht also bei $r = r_c$ ein Extremum. Folglich ergeben sich aus Glg. 3.113 vier Klassen von Lösungen:

- 1: $u(r)$ steigt monoton bis $r = r_c$, wo ein Maximum erreicht wird, um dann wieder abzunehmen,
- 2: $u(r)$ nimmt monoton ab und erreicht bei $r = r_c$ den Wert $u^2(r_c) = 2kT/m$,
- 3: $u(r)$ steigt monoton und erreicht bei $r = r_c$ den Wert $u^2(r_c) = 2kT/m$,
- 4: $u(r)$ nimmt monoton ab bis $r = r_c$, erreicht dort ein Minimum, um anschließend wieder zu steigen.

Die vier Klassen unterscheiden sich durch andere Randbedingungen bei $r = r_0$ und $r \rightarrow \infty$. Klassen 2 und 4 sind nicht physikalisch, weil sie für kleine r , also nahe r_0 eine Geschwindigkeit aufweisen, welche wesentlich größer ist, als die thermische Geschwindigkeit des Gases. Klassen 1 und 3 sind aus diesen Überlegungen noch nicht ausgeschieden und wir müssen deren Verhalten für $r \rightarrow \infty$ bestimmen. Dazu kann die Ableitung $\frac{du}{dr}$ umgeschrieben werden als $(1/2u)(du^2/dr)$ und man erhält für Glg. 3.113

$$\frac{1}{2} \frac{du^2}{dr} \left(1 - \frac{2kT}{m} \frac{1}{u^2} \right) = \frac{4kT}{mr} - \frac{GM_\odot}{r^2}. \quad (3.117)$$

Diese lässt sich einfach lösen, indem man mit dr multipliziert und anschließend links nach du^2 und rechts nach dr integriert. Die Lösung $u(r)$ wird beschrieben durch

$$\left(\frac{u}{u_c} \right)^2 - \ln \left(\frac{u}{u_c} \right)^2 = 4 \ln r + \frac{GM_\odot m}{kTr} + \ln(u_c^2) + C', \quad (3.118)$$

wo $u_c = u(r_c)$.

Die Integrationskonstante C' bestimmt das Verhalten der vier Lösungsklassen. Für Klassen 2 und 3 verlangen wir gemäß den vorherigen Überlegungen, dass am kritischen Radius r_c gilt $u = u_c$. Wir erhalten so die Lösung von Glg. 3.113 in impliziter Form,

$$u^2 - u_c^2 - u_c^2 \ln\left(\frac{u}{u_c}\right)^2 = 4u_c^2 \ln\left(\frac{r}{r_c}\right) + 2GM_\odot \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_c}\right). \quad (3.119)$$

Das Verhalten von Glg. 3.119 ist in Abb. 3.45 für verschiedene Abstände von

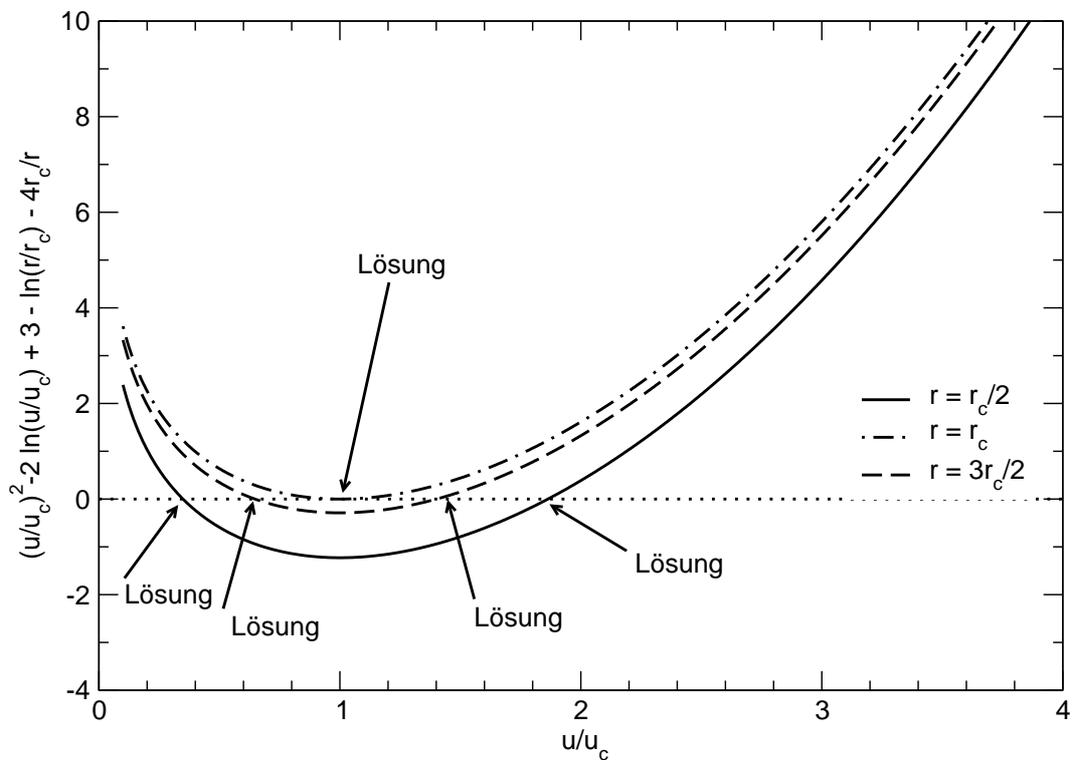


Abbildung 3.45: Grafische Darstellung der impliziten Lösung des Parkermodells für den Sonnenwind. Die Lösungen für die Geschwindigkeit der koronalen Expansion sind die Nullstellen von Gleichung 3.119, bzw. 3.120.

der Sonne dargestellt. Wie mit der Bestimmung der Integrationskonstanten verlangt, hat sie bei $r = r_c$ genau eine Lösung, $u = u_c$. Bei allen anderen Abständen $r \neq r_c$ hat sie zwei Lösungen, eine langsame und eine schnelle. Gleichung 3.119 kann numerisch gelöst werden (Tun Sie dies in Übung 3.19!).

Übung 3.19 Lösen Sie Gleichung 3.119 numerisch und stellen Sie das Resultat für verschiedene Temperaturen T dar. Tragen Sie die kritischen Punkte ein. Wie gut ist die Näherung einer konstanten Geschwindigkeit bei der Erde? Geben Sie die Integrationskonstante C' explizit für verschiedene Geschwindigkeiten am kritischen Punkt an.

Für die beiden anderen Klassen 1 und 4 gelten andere Randbedingungen, d.h. die Integrationskonstante lautet anders. Diese legen wir so fest, dass am kritischen Radius $u(r_c) = \tilde{u}$ gilt. Die allgemeine Lösung lautet in diesem Fall

$$\left(\frac{u}{u_c}\right)^2 - \left(\frac{\tilde{u}}{u_c}\right)^2 - 2\ln\left(\frac{u}{\tilde{u}}\right) + 4\left(1 - \ln\left(\frac{r}{r_c}\right) - \frac{r_c}{r}\right) = 0. \quad (3.120)$$

Das Verhalten der einzelnen Lösungen (1 bis 4) ist in Abb. 3.46 dargestellt. Die Lösungen verhalten sich wie erwartet. Für Lösungen der Klassen 1 und 2

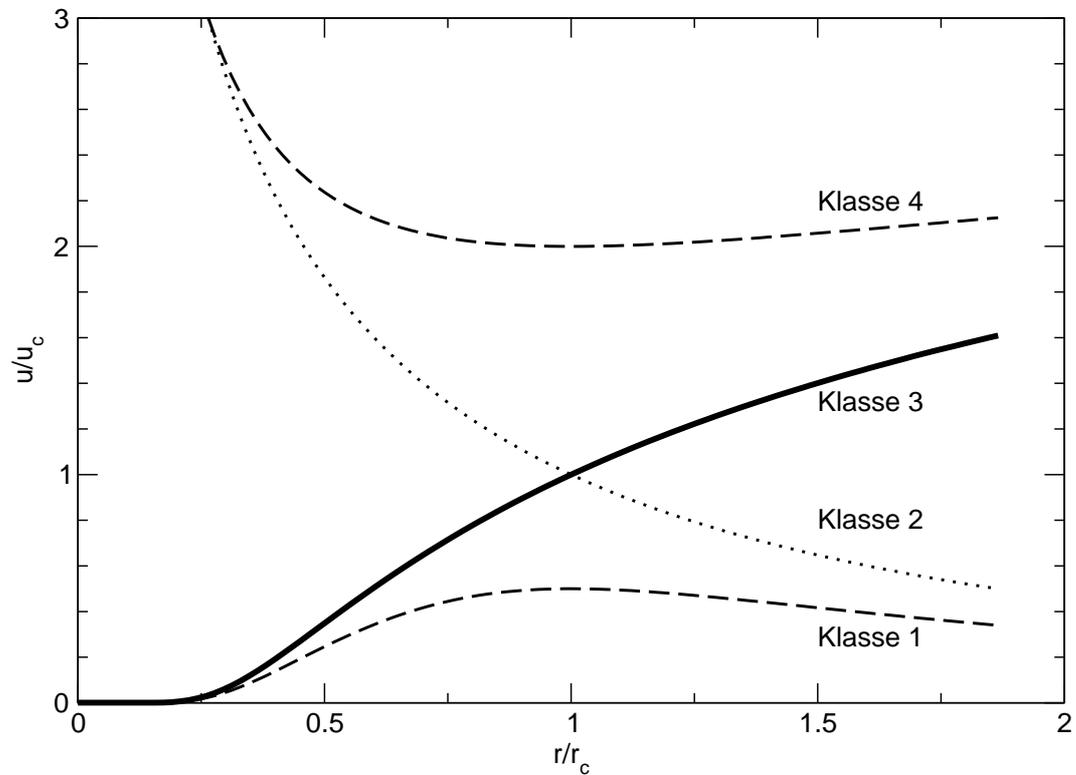


Abbildung 3.46: Die vier Lösungsklassen des Parkermodells. Klassen 1 und 2 erlauben kein Gleichgewicht mit dem interstellaren Medium, während Klasse 4 nahe an der Sonne nicht beobachtete, zu hohe Geschwindigkeiten aufweist. Lösungen der Klasse 3 sind physikalisch und beschreiben den Sonnenwind erstaunlich gut.

ist $u/u_c < 1$ und $u/\tilde{u} < 1$ für große Abstände $r \rightarrow \infty$. Damit wird $|(u/u_c)^2| \ll |\ln(u/u_c)^2|$ und damit

$$\ln(u/u_c) \approx -2\ln(r/r_c), \quad \text{also} \quad u \propto \left(\frac{r_c}{r}\right)^2. \quad (3.121)$$

Wegen der Kontinuitätsgleichung 3.110, bzw. der Erhaltung des Massenflusses (Glg. 3.112), wird für diese Lösungsklassen also die Dichte bei großen

Abständen einen endlichen Wert n_∞ annehmen. Weil wir eine isotherme Korona angenommen haben, wird also $P = 2n_\infty kT$ ebenfalls einen von Null verschiedenen, endlichen Wert annehmen, was es verunmöglicht, mit dem stark verdünnten, kalten, interstellaren Medium ins Gleichgewicht zu kommen. Wir brauchen also eine Lösung, welche für große Abstände

$$\lim_{r \rightarrow \infty} n(r) = 0$$

erlaubt. Dies ist nach den vorherigen Überlegungen nur für Lösungen der Klassen 3 und 4 möglich. Weil für sie $u \gg u_c$ für große Abstände gilt, haben wir

$$\left(\frac{u}{u_c}\right)^2 \approx 4 \ln\left(\frac{r}{r_c}\right), \quad \text{also} \quad u \approx 2u_c \sqrt{\ln(r/r_c)}$$

und $n \rightarrow 0$ und damit $P \rightarrow 0$. Wie bereits erwähnt können Lösungen der Klassen 2 und 4 ausgeschlossen werden, weil sie nahe an der Sonne, also tief in der Korona und unterhalb von r_c , Geschwindigkeiten aufweisen, welche über der lokalen Schallgeschwindigkeit liegen. Solch hohe Geschwindigkeiten werden in den koronalen Massenbewegungen nicht beobachtet. Damit ist von den 4 Lösungen nur diejenige von Klasse 3 physikalisch. Die Expansion des Sonnenwindes beginnt langsam, erreicht am kritischen Punkt die Schallgeschwindigkeit und expandiert anschließend supersonisch weiter ins All. In Abb. 3.47 sind Lösungen für verschiedene koronale Temperaturen dargestellt.

Natürlich ist das soeben behandelte Modell für den Sonnenwind sehr stark vereinfacht und in vielen Aspekten schlicht falsch. So stammt z.B. der schnelle Sonnenwind aus kühleren koronalen Gebieten, als der langsame Sonnenwind. Dennoch werden die Grundzüge richtig wiedergegeben. Etliche Annahmen sind nicht gerechtfertigt, wie z.B. die Isothermie, die gleichen Temperaturen für Elektronen und Protonen, etc. Weitergehende, physikalisch bessere Modelle sind aber wesentlich komplizierter, und deren Lösung erfordert demnach einen wesentlich größeren Aufwand, als hier getrieben werden kann.

3.5.4 Beobachtungen

Fehlt z. Zt. noch

3.5.5 Ausblick auf Sternwinde

Fehlt z. Zt. noch.

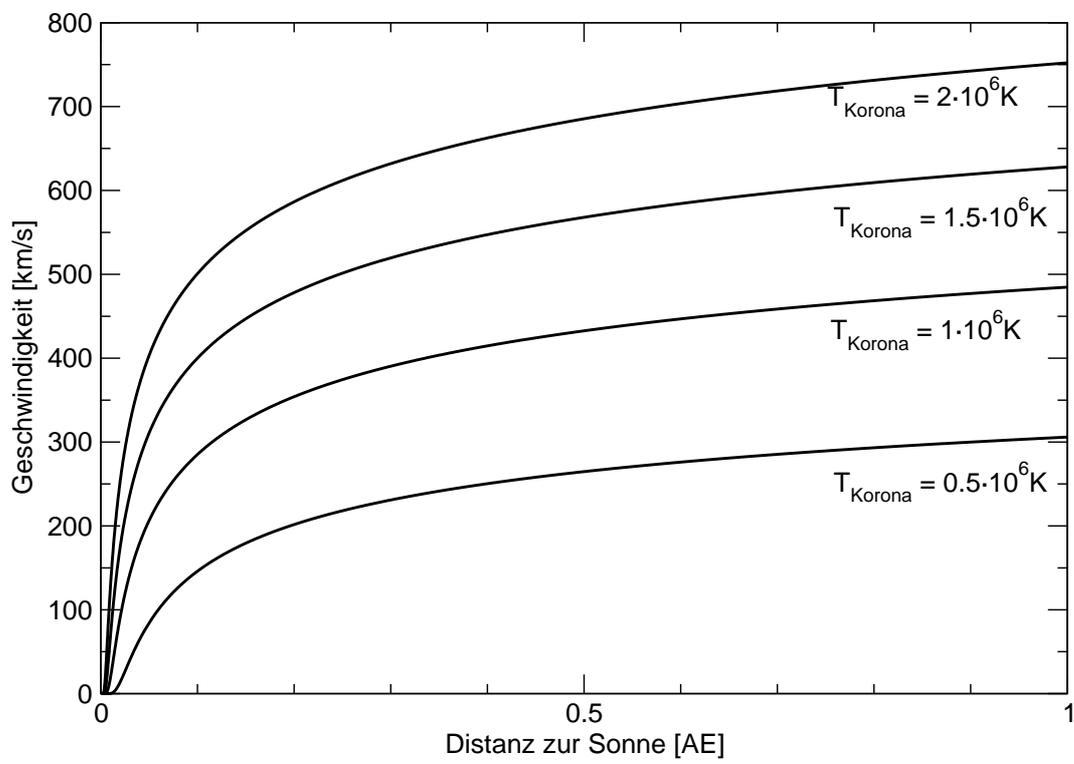


Abbildung 3.47: Lösungen des isothermen Parkermodells für verschiedene koronale Temperaturen.

Kapitel 4

Planetare Ionosphären

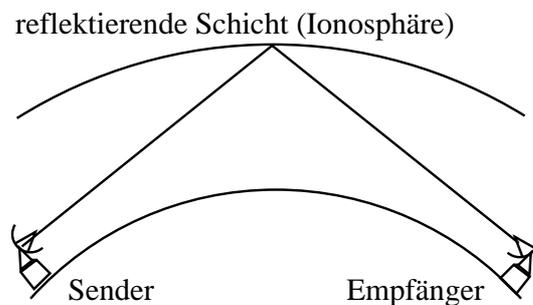


Abbildung 4.1: Radiowellen können an der Ionosphäre reflektiert werden und können deshalb an Orten empfangen werden, die mit geradliniger Ausbreitung nicht erreichbar wären.

12. Dezember im Jahre 1901 von Poldhu in Cornwall, England über den Atlantik bis nach St. Johns in New Foundland in Kanada. Die Erklärung mit einer durch freie Ladungsträger hervorgerufenen reflektierenden Schicht in großer Höhe wurde bald darauf unabhängig von Kennelly, Heaviside und Lodge 1902 geliefert. Die Ionisation durch solare UV wurde bald darauf als Erklärung herangezogen, die Existenz der Ionosphäre aber erst 1924 durch zwei Gruppen unabhängig voneinander bestätigt.

Auch wenn die Interpretation heute einfach scheint - bis 1900 waren Elektronen und Ionen als freie Ladungsträger nicht bekannt!

Wir werden in diesem Kapitel die Entstehung, den Aufbau und Prozesse in planetaren Ionosphären untersuchen. Die Ionosphäre wurde erst im letzten Jahrhundert entdeckt und unwidersprüchlich nachgewiesen. Während schon Gauß, später Kelvin und darauf Stewart aufgrund von Fluktuationen und regelmäßigen täglichen Änderungen im irdischen Magnetfeld über eine leitende Schicht in der oberen Atmosphäre spekuliert hatten, blieb sie lange Zeit Spekulation, bis zur bahnbrechenden Funkübermittlung von Marconi um die Mittagszeit am

4.1 Radiowellen in der Ionosphäre

Um zu verstehen, wie Radiowellen an der Ionosphäre reflektiert werden können, müssen wir die Ausbreitung von Radiowellen in einem Plasma untersuchen. Diese werden die freien Ladungsträger durch das mit ihnen mitgeführten elektrischen Feld auslenken (beschleunigen), diese werden ihrerseits wegen der

erfolgten Beschleunigung elektromagnetische Wellen ausstrahlen, welche der primären Welle überlagert wird. Damit ist klar, dass eine geschlossene mathematische Beschreibung schwierig wird. Wir werden deshalb vereinfachende Annahmen machen, die eine makroskopische Beschreibung (und Beobachtung) zulassen.

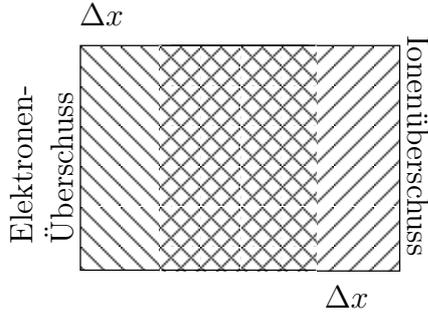


Abbildung 4.2: Zur Herleitung der Plasmafrequenz.

Als einfachsten Fall rufen wir uns die Plasmaoszillationen in Erinnerung. Z. B. durch ein kurzzeitig angelegtes äußeres elektrisches Feld werden Elektronen von Ionen getrennt. Wird das Feld ausgeschaltet, wirkt ein elektrisches Feld zwischen Ionen und Elektronen, welches bestrebt ist, wieder ein neutrales Gemisch zu erzeugen. Sofern die Dämpfung klein genug ist, beginnt das Plasma um einen Gleichgewichtszustand mit der Plasmafrequenz zu oszillieren. Im Kräftegleichgewicht ist die auslenkende Kraft auf eine Elektron $m_e a$ gerade gleich der Kraft

durch das rücktreibende elektrische Feld eE . Das elektrische Feld ist gerade $E = ne\Delta x/\varepsilon$ ($\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \rho/\varepsilon$ für eine unendlich ausgedehnte Ladungsverteilung) und folglich gilt

$$nm_e \frac{d^2 \Delta x}{dt^2} = -\frac{n^2 e^2}{\varepsilon} \Delta x.$$

Diese Schwingungsgleichung hat eine Lösung

$$\Delta x = \Delta x_0 \sin(\omega_p t),$$

wo ω_p die Plasmafrequenz ist,

$$\omega_p \doteq \sqrt{\frac{ne^2}{\varepsilon m_e}}. \quad (4.1)$$

In der realen Welt spielt natürlich die Dämpfung aufgrund von Stößen der Ladungsträger mit dem Neutralgas und untereinander eine wesentliche Rolle. Ferner trägt auch die Abstrahlung zur Dämpfung bei. Wir haben es also mit einer gedämpften Schwingungsgleichung zu tun. Wird das Plasma durch ein elektrisches Feld ausgelenkt, so kommt noch der Anregungsterm dazu und wir haben eine erzwungene gedämpfte Schwingung.

Aus der Einführung in die Experimentalphysik II wissen wir, dass der Brechungsindex eine komplexe Größe ist und proportional zur Dichte der Elektronen, N .

$$n = 1 + \frac{Ne^2}{2\varepsilon_0 m \left[(\omega_p^2 - \omega^2) + i\gamma\omega \right]}, \quad (4.2)$$

wo γ die Dämpfungskonstante ist. Die beiden Teile des Brechungsindex haben verschiedene physikalische Bedeutungen. Wir schreiben erst Real- und Imaginärteil explizit auf, $n = n' - i\kappa$:

$$n = 1 + \frac{Ne^2}{2\varepsilon_0 m \left[(\omega_p^2 - \omega^2) + i\gamma\omega \right]} \quad (4.3)$$

$$= \frac{Ne^2}{2\varepsilon_0 m} \frac{(\omega_p^2 - \omega^2)}{(\omega_p^2 - \omega^2)^2 + (\gamma\omega)^2} - i \frac{Ne^2}{2\varepsilon_0 m} \frac{\gamma\omega}{(\omega_p^2 - \omega^2)^2 + (\gamma\omega)^2} \quad (4.4)$$

$$= \frac{Ne^2}{2\varepsilon_0 m} \frac{(\omega_p^2 - \omega^2)}{(\omega_p^2 - \omega^2)^2 + (\gamma\omega)^2} - i \frac{Ne^2}{2\varepsilon_0 m} \frac{\gamma\omega}{(\omega_p^2 - \omega^2)^2 + (\gamma\omega)^2} \quad (4.5)$$

Die Ausdrücke für n' und κ sind die Dispersionsrelationen für elektromagnetische Wellen in Materie. Sie geben die Brechzahl (n') und den Absorptionskoeffizienten (κ) an. Abb. 4.3 zeigt das Verhalten von Real- und Imaginärteil des Brechungsindex.

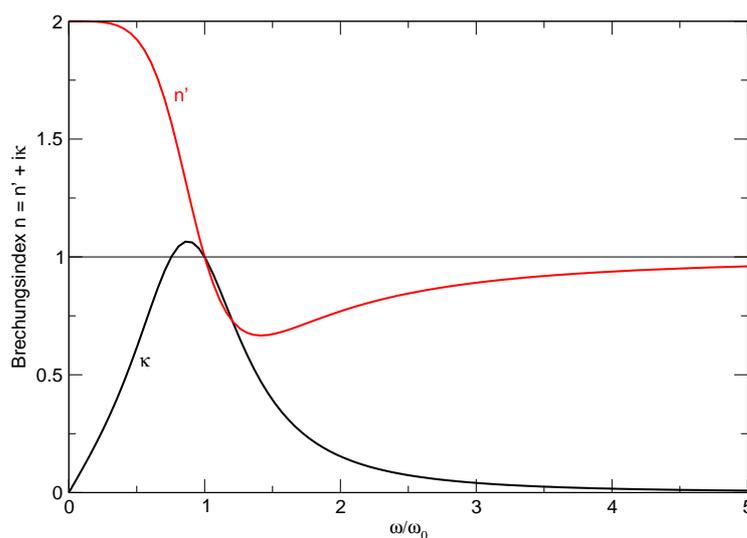


Abbildung 4.3: Real- und Imaginärteil des Brechungsindex.

Die Gleichung 4.2 wurde damals unter der Annahme eine optisch dünnen Mediums hergeleitet. In einem polarisierbaren Medium wie einem Plasma müssen wir die Herleitung etwas allgemeiner fassen. Die Maxwell'schen Gleichungen lauten

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \times \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} & ; & \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho \\ \vec{\nabla} \times \vec{B} &= \mu\mu_0 \left(\vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) & ; & \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0, \end{aligned}$$

wo die elektrische Verschiebungsdichte

$$\vec{D} = \varepsilon\varepsilon_0 \vec{E} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$$

ist und \vec{P} die dielektrische Polarisierung ist.

Wir machen nun die Annahme, dass in der ruhigen Ionosphäre keine Ströme fließen ($\vec{j} = 0$) und die Ladungsdichte im Mittel verschwindet, $\rho = 0$. Bestimmen wir von $\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\partial_t \vec{B}$ die Rotation, so erhalten wir

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{E} &= -\vec{\nabla} \times \partial_t \vec{B} = -\mu_0 \partial_t^2 \vec{D}, \\ -\Delta \vec{E} &= -\mu_0 \varepsilon_0 \partial_t^2 \vec{E} - \mu_0 \partial_t^2 \vec{P},\end{aligned}\quad (4.6)$$

wo in der nicht ferromagnetischen Ionosphäre $\mu \approx 1$ gilt. Wir sehen unmittelbar, dass das elektrische Feld der einlaufenden Primärwelle nach dem Durchlaufen einer Schicht von einer durch die Plasmaschwingungen erzeugten Sekundärwelle überlagert wird. Die einlaufende Welle bewegt sich nach Voraussetzung mit der Geschwindigkeit $c = 1/\mu_0 \varepsilon_0$ wie auch die Sekundärwellen. Diese sind aber gegenüber der Primärwelle phasenverschoben.

Die dielektrische Polarisierung ist für kleine Feldstärken \vec{E} proportional zur Dichte und zum elektrischen Feld,

$$\vec{P} = N\alpha \vec{E} = N\alpha \vec{E}_0 e^{i(\omega t - \vec{k}\vec{z})},$$

wo α , die Proportionalitätskonstante, der Polarisierbarkeit entspricht. Setzen wir diesen Ausdruck in Glg. 4.6 ein und betrachten wir nur die x -Komponente, so erhalten wir

$$-k_x^2 E_x = -\frac{\omega^2}{c^2} E_x - \frac{N\alpha\omega^2}{\varepsilon_0 c^2} E_x \quad \text{und folglich} \quad k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \left(1 + \frac{N\alpha}{\varepsilon_0}\right).$$

Die Phasengeschwindigkeit der Strahlung ist $v_{\text{Ph}} = c/n = \omega/k$ und folglich gilt $n = c \cdot k/\omega$. Wir erhalten damit

$$n^2 = 1 + \frac{N\alpha}{\varepsilon_0}. \quad (4.7)$$

Die Auslenkung des schwingenden Plasmas ist gegeben durch

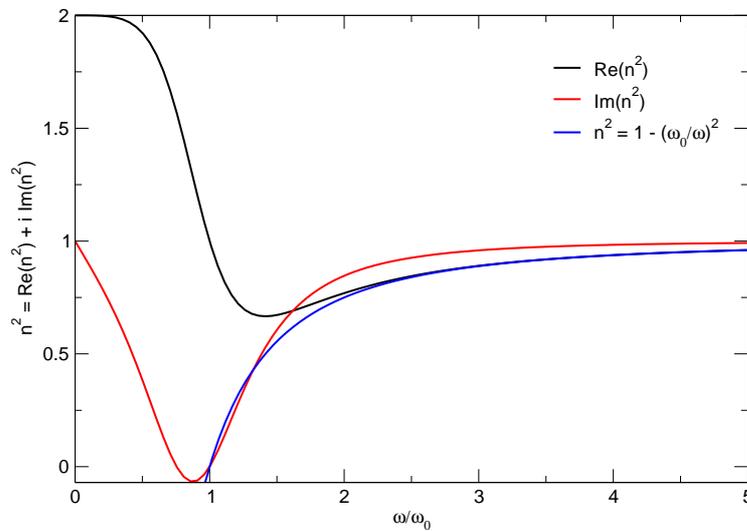
$$x_0 = -\frac{eE_0}{m} \frac{1}{(\omega_p^2 - \omega^2) + i\gamma\omega}$$

und das induzierte Dipolmoment dieses Plasmapaketes gerade $p = -Nex_0 = N\alpha E$. Folglich gilt

$$n^2 = 1 + \frac{e^2 N}{\varepsilon_0 m} \frac{1}{\omega_p^2 - \omega^2 + i\gamma\omega} \quad (4.8)$$

Der Unterschied zur aus der Einführungsvorlesung bekannten Formel 4.2 ist, dass dieser Ausdruck (Glg. 4.8) auch für größere Werte von $n - 1$ gilt. Für kleine Werte von $n - 1$ geht Glg. 4.8 in Ausdruck 4.2 über.

Diese Herleitung gilt für $\vec{j} = 0$, $\mu = \varepsilon = 1$ und $\rho = 0$. Wie sieht es nun in einem leitenden Plasma aus, in einem Plasma in dem die Leitfähigkeit σ

Abbildung 4.4: Brechungsindex für größere Werte von $n - 1$.

nicht klein ist? Die elektrische Feldstärke \vec{E} einer Welle führt zu einem Strom $\vec{j} = \sigma \vec{E}$ und man erhält für die Wellengleichung

$$\delta \vec{E} = \frac{1}{v_{\text{Ph}}^2} \partial_t^2 \vec{E} + \mu \mu_0 \sigma \partial_t \vec{E}, \quad (4.9)$$

wo der neue Term $\mu \mu_0 \sigma \partial_t \vec{E}$ einem Dämpfungsterm entspricht (erste Ableitung von \vec{E}). Die Lösung dieser Gleichung ist bekannt,

$$\vec{E}(z, t) = \vec{E}_0 e^{-(\beta/2)z} e^{i(\omega t - kz)}, \quad (4.10)$$

für eine entlang z laufende Welle und wo β der Absorptionskoeffizient ist.

Übung 4.1 Zeigen Sie dies!

Wir sehen in Abb. 4.4, dass der Brechungsindex für große Frequenzen $\omega > \omega_p$ kleiner wird als eins und deshalb die Phasengeschwindigkeit der Welle größer wird. Für schräg einfallende Wellen gilt wie in der Optik dann auch das Brechungsgesetz von Snellius,

$$\frac{\sin \theta_1}{\sin \theta_2} = \frac{n_2}{n_1}.$$

Diese Brechung erklärt auch die Radiotransmission von Kurzwellen. Ironischerweise ist die Radiotransmission von Marconi sehr wahrscheinlich im Langwellenbereich erfolgt. Diese Wellen breiten sich entlang der Erdoberfläche aus, was ihre Transmission erklärt. Die Reflexion an der Ionosphäre spielt erst ab dem Kurzwellenbereich eine Rolle.

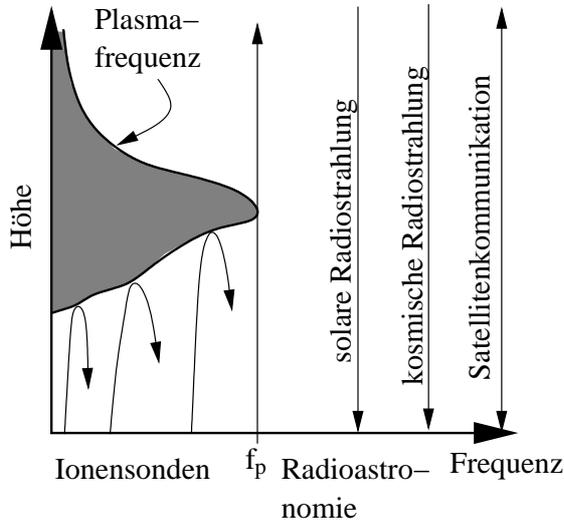


Abbildung 4.5: Durchlässigkeit der Ionosphäre für Radiowellen.

einer Plasmafrequenz entspricht, die mit der Frequenz der Welle, ω , übereinstimmt, so wird die Welle reflektiert. In diesem Fall haben wir die Bewegungsgleichung

$$nm\partial_t^2\Delta x + nm\nu^*\partial_t\Delta x + \frac{e^2n^2}{\varepsilon_0}\Delta x = -enE_0\sin\omega_0t, \quad (4.11)$$

wo $\omega_0 = \omega_p$ die Frequenz der anregenden Welle (der eindringenden Welle) ist. Mit dem Ansatz $\Delta x = x_0 \exp(i(\omega t - kz))$ erhalten wir

$$i\nu^*\omega x = -\frac{e}{m}E_0\sin\omega_p t \quad (4.12)$$

weil sich der erste und dritte Term in Glg. 4.11 dann gerade aufheben. Damit ist dem Wachstum der Oszillationen nur durch die Reibung (Stöße) eine Grenze gesetzt. Durch diese wird Leistung aus der Welle in Wärme umgesetzt. Das durch die großen Amplituden entstehende Dipolmoment wird auch groß und die Elektronen sind nun effiziente Dipolstrahler. Sie strahlen bei derselben Frequenz nach oben und unten um π phasenverschoben ab. In vorwärtsrichtung werden die Wellen aber wieder absorbiert und reemittiert, in Rückwärtsrichtung werden sie aber transmittiert. Der Nettoeffekt ist eine Reflexion der Welle an der Schicht in der Ionosphäre, die gerade dieselbe Plasmafrequenz hat, wie die Frequenz der Welle. Durch Laufzeitmessungen kann so die Höhe dieser Schicht ermittelt werden, durch Abstimmen der Frequenzen kann ein Höhenprofil der Elektronendichte gewonnen werden. Diese einfache Erklärung der Arbeitsweise von Ionensonden wird durch die starken Veränderungen der Phasengeschwindigkeiten in Regionen mit Plasmafrequenzen in der Nähe der Frequenz der Welle und durch die Beugung der Welle in den Regionen unterhalb der reflektierenden Schicht verkompliziert. Diese Regionen werden von

Die Ionosphäre ist nur für elektromagnetische Wellen mit Frequenzen größer als die maximale Plasmafrequenz durchsichtig. Typische Werte für Plasmafrequenzen liegen bei einigen MHz. Von der Erdoberfläche emittierte Wellen unter dieser Frequenz verlassen die Erde nicht. Ionensonden (Abb. 4.1) nutzen die Reflexion von Radiowellen an der Ionosphäre zur Bestimmung von Profilen der ionosphärischen Elektronendichte. Erreicht eine Welle mit Frequenz ω eine Höhe in der Ionosphäre, in der die Elektronendichte gerade

reflektierten Wellen zweimal durchlaufen. Abb. 4.6 zeigt schematisch ein Ionogramm. Den Spitzen in der Höhe entsprechen die Plasmafrequenzen der absorbierenden Schichten, den “Tälern” entspricht eine virtuelle Höhe, die durch verfeinerte Analysen genauer bestimmt werden muss. Offensichtlich besteht die Ionosphäre aus verschiedenen Schichten, von denen hier die E und die F1 und F2 Schichten zu sehen sind.

Bei höheren Frequenzen als der Plasmafrequenz werden Radiowellen nur noch durch kleinskalige Dichtefluktuationen in der Ionosphäre inkohärent gestreut. Ein Teil des gestreuten Signals kommt zurück, was mit “incoherent backscatter radars” ebenfalls zur Diagnostik der Ionosphäre benutzt wird.

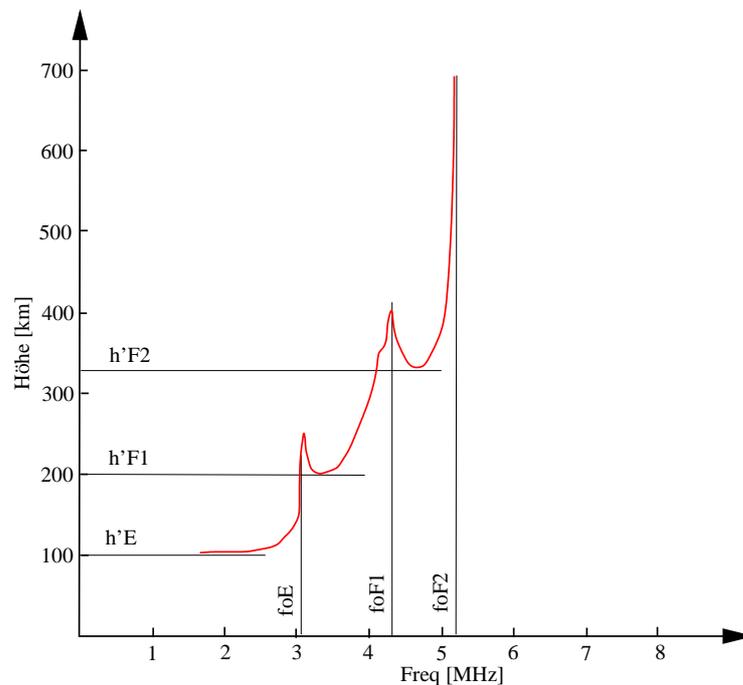


Abbildung 4.6: Schematik eines Ionogramms.

4.2 Entstehung von Ionosphären

Den Grundstein für das Verständnis der Entstehung der Ionosphäre haben wir bereits mit der Diskussion des Strahlungstransfers und des Treibhauseffekts gelegt. Die solare Strahlung wechselwirkt mit der Atmosphäre und wird durch diese absorbiert. Die wesentlichen Absorptionsprozesse haben wir bereits in Absch. 2.1.5 kennengelernt. Für die Bildung einer Ionosphäre sind natürlich die Prozesse wichtig, bei denen ein Atom oder ein Molekül ionisiert wird. Wegen der dazu erforderlichen Energie spielt hier im Gegensatz zum Treibhauseffekt nur die UV-Strahlung eine Rolle und wir brauchen nicht über die Kirchhoff-Planck-Funktion zu integrieren.

Auch wenn die Energie des Photons für die Ionisation ausschlaggebend ist, so variieren die Wirkungsquerschnitte der einzelnen Absorptionsprozesse doch stark, z. B. für O_2 zwischen 10^{-25} und 10^{-20} m^2 zwischen $70 \text{ nm} < \lambda < 200 \text{ nm}$.

Übung 4.2 Warum kann vom Erdboden keine UV-Astronomie betrieben werden? Hinweis: Nehmen Sie einen durchschnittlichen Wirkungsquerschnitt von 10^{-21} m^2 und eine isotherme Atmosphäre bei Raumtemperatur an.

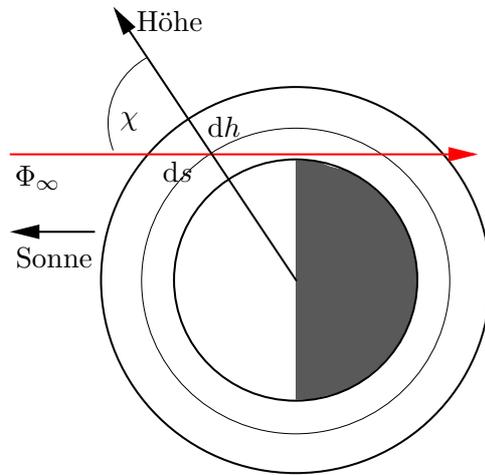


Abbildung 4.7: Zur Geometrie der atmosphärischen Extinktion.

Abb. 4.7 zeigt die Geometrie der Extinktion von Strahlung in der Atmosphäre. Auf einer Strecke ds nimmt der Strahlungsfluss um $d\Phi$ ab

$$d\Phi = -\sigma n(h) \frac{dh}{\cos \chi} \Phi(h). \quad (4.13)$$

Die Höhenabhängigkeit des Flusses (oder der Extinktion) kann nun einfach durch Integration ermittelt werden:

$$\int_{\Phi_\infty}^{\Phi(h)} \frac{d\Phi}{\Phi} = -n_0 \int_\infty^h \sigma e^{-\frac{h}{H}} \frac{dh}{\cos \chi}, \quad (4.14)$$

wo wir die barometrische Höhenformel eingesetzt haben. Die Lösung ist eine Exponentialfunktion

$$\Phi(h) = \Phi_\infty \exp \left\{ -\frac{\sigma n_0 H}{\cos \chi} \exp(-h/H) \right\} \approx \Phi_\infty \exp \left\{ -\frac{\sigma n(h) H(h)}{\cos \chi} \right\}. \quad (4.15)$$

Der hier verwendete mittlere Wirkungsquerschnitt berücksichtigt anteilig die Beiträge von allen in Abschnitt 2.1.5 besprochenen Prozessen. Wegen der sich ändernden Zusammensetzung und Atmosphärenchemie sind diese eigentlich höhenabhängig, was wir hier vernachlässigt haben.

Wir haben einen weiteren wichtigen Punkt vernachlässigt. für flach einfallende Strahlen spielt die Erdkrümmung eine Rolle, wie in Abb. 4.7 ersichtlich ist. Eine Höhenschicht kann ein- oder zweimal durchdringen werden. Wir werden die weiter unten berücksichtigen.

Noch haben wir die Entstehung von Elektronen-Ion-Paaren nicht in unser einfaches Modell der Atmosphäre eingebaut. Die Anzahl von Elektronen-Ion-Paaren pro Volumen, Photoionisationsrate q , ist proportional zu absorbierten Strahlung $d\Phi$ pro Wegstrecke ds und zur Effizienz der Photoionisation, κ .

$$q(h) = \kappa \frac{d\Phi}{ds} = \kappa \cos \chi \frac{d\Phi}{dh}. \quad (4.16)$$

Wir können mit Glg. 4.13 $d\Phi/dh$ durch Φ ersetzen und erhalten

$$q(h) = \kappa \sigma n(h) \Phi(h). \quad (4.17)$$

Wir können nun $n(h)$ aus der barometrischen Höhenformel (Glg. 2.16) und $q(h)$ aus Glg. 4.16 einsetzen um die sog. Chapman-Produktionsfunktion einzuführen:

$$q(h) = \kappa \sigma n_0 \Phi_\infty \exp \left\{ -\frac{h}{H} - \frac{\sigma n_0 H}{\cos \chi} \exp(-h/H) \right\} \quad (4.18)$$

Abbildung 4.8 gibt einen Eindruck, wie sich n , Φ und q mit der Höhe verhalten. In dieser Abbildung wird die unabhängige Größe, die Höhe, als Ordinate verwendet, was in den Geowissenschaften und Meteorologie durchaus üblich ist. Hier wurde ein senkrechter Einfall angenommen. Die Ionisationsrate ist in

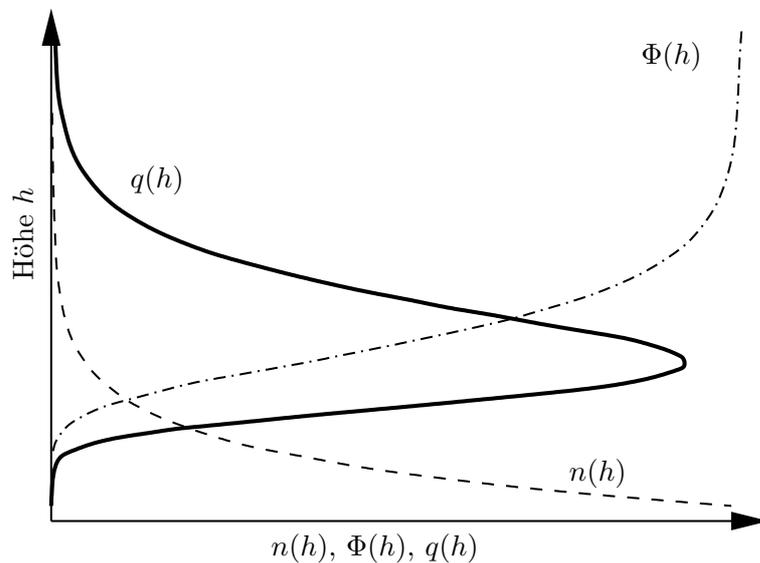
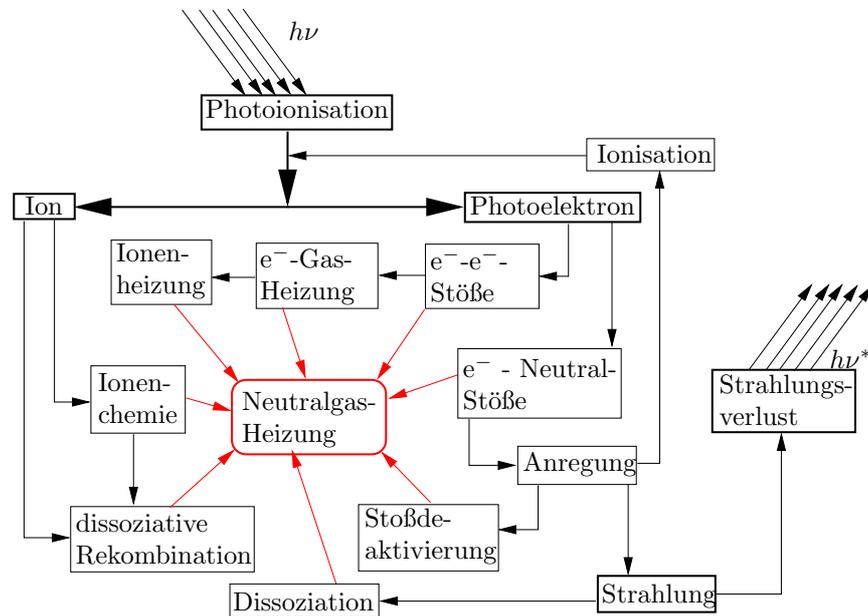


Abbildung 4.8: Entstehung einer Ionisationsschicht in der Ionosphäre.

diesem Fall maximal. Für andere Winkel χ erwarten wir also kleinere Ionisationsraten und damit eine tages- und jahreszeitliche Schwankung und eine Breitenabhängigkeit der Ionisationsdichte der Photoionisationsschicht der Ionosphäre. Ferner ist die Atmosphäre natürlich auch nicht isotherm und die Skalenhöhen folglich nicht konstant. Die Atmosphärenchemie muss bei der Bestimmung der Absorptionswirkungsquerschnitte berücksichtigt werden, wie auch die Abhängigkeit von der Wellenlänge. Weitere Einflüsse haben die Sonnenaktivität, die Tatsache, dass bei hohen Breiten die Strahlung “zweimal” durch die Atmosphäre geht (siehe Abb. 4.7).

4.2.1 Heizung II und Zirkulation II

Ein Teil der absorbierten Strahlung erwärmt auch die Atmosphäre. Die Ionisationseffizienz $\kappa < 1$. Allerdings ist es nicht einfach, die Heizeffizienz zu bestimmen. Dies kann in Abb. 4.9 gesehen werden, in der nur die durch die Photoionisation initiierten Heizprozesse aufgeführt sind. Diese Heizung der obo-

Abbildung 4.9: Heizprozesse in der Atmosphäre. Nach *Prölss* (2004).

ren Atmosphäre vermag auch Winde zu antreiben. In der Nähe des subsolaren Punktes bildet sich ein thermosphärisches Hochdruckgebiet aus, welches wegen des aufgetretenen Druckgradienten Winde mit Geschwindigkeiten bis zu 200 m/s erzeugt. Diese fließen sowohl in äquatorialer wie auch in polare Richtungen (vom Hochdruckgebiet weg) und unterliegen auch der Corioliskraft. Das Druckmaximum und -minimum sind gegenüber dem subsolaren bzw. antisolaren Punkt zeitlich etwas verspätet.

4.2.2 Elektrische Leitfähigkeit

Sobald in einem Plasma Stöße auftreten, so muss die Bewegungsgleichung für die Plasmateilchen um einen Reibungsterm ergänzt werden. Dieser muss proportional sein zur Differenz der Geschwindigkeiten des zu untersuchenden Teilchen \vec{v} und des Plasmas \vec{u} wie auch zur Stoßfrequenz ν .

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = q (\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) - m\nu (\vec{v} - \vec{u}) \quad (4.19)$$

In einem stationären, unmagnetisierten Plasma ($\vec{B} = 0$), in dem sich alle Elektronen mit Geschwindigkeit \vec{v}_e bewegen und die restlichen Stoßparameter in Ruhe befinden erhalten wir als Bewegungsgleichung

$$\vec{E} = -\frac{m_e \nu}{e} \vec{v}_e.$$

Weil sich die Elektronen relativ zu den Ionen oder Neutralgasatomen bewegen, führen sie auch einen Strom

$$\vec{j} = -en_e \vec{v}_e.$$

Beide Gleichungen zusammen ergeben das Ohm'sche Gesetz

$$\vec{E} = \frac{m_e \nu}{n_e e^2} \vec{j} = \eta \vec{j}, \quad \text{wo } \eta = \frac{m_e \nu}{n_e e^2}. \quad (4.20)$$

η ist der Plasmawiderstand. Ist das Plasma vollständig ionisiert, so können wir den für die Stoßfrequenz den Ausdruck für die Coulomb-Stöße verwenden, den wir aus der Plasmaphysik kennen.

$$\text{Mit } \nu_{ei} \approx \frac{\omega_{pe}}{64\pi} \frac{\ln \Lambda}{\Lambda} \text{ erhalten wir } \eta_S = \frac{1}{64\pi \epsilon_0 \omega_{pe}} \frac{\ln \Lambda}{\Lambda} \quad (4.21)$$

als Ausdruck für den Spitzer-Widerstand η_S des Plasmas. Dieser ist von der Plasmadichte unabhängig. Versuche ich die Leitfähigkeit eines Plasmas durch Zugabe von Ladungsträgern zu erhöhen, so steigt auch die Stoßfrequenz, was die Geschwindigkeit der Ladungsträger verringert und damit auch den Strom (oder die Leitfähigkeit).

In einem magnetisierten Plasma muss der Einfluss des Magnetfeldes berücksichtigt werden. Dieses kann zu neuen Phänomenen führen, wie wir noch sehen werden. Bewegt sich das Plasma mit einer Geschwindigkeit \vec{v} gegenüber einem Magnetfeld, so müssen wir das sich aus der Lorentzkraft ergebende elektrische Feld $\vec{v} \times \vec{B}$ zum Ohmschen Gesetz addieren. Wir erhalten

$$\vec{j} = \sigma_0 (\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}), \quad (4.22)$$

wo wir den Widerstand durch sein Inverses, die Plasma-Leitfähigkeit, ersetzt haben,

$$\sigma_0 = \frac{n_e e^2}{m_e \nu}. \quad (4.23)$$

Glg. 4.22 ist eine einfache Version des Ohm'schen Gesetzes, welches in allen vollständig ionisierten geophysikalischen Plasmen gültig ist. In diesen Plasmen sind Stöße sehr selten und deshalb kann die Plasmaleitfähigkeit als fast unendlich betrachtet werden. Mit einer Ausnahme kann in diesen Plasmen die Leitfähigkeit als Skalar behandelt werden. Die Ausnahme ist die niedrige Ionosphäre, wo Stöße zwischen dem ionisierten und neutralen Gas eine wichtige Rolle spielen. Die Kombination mit dem irdischen Magnetfeld führt zu einem anisotropen Leitfähigkeitstensor.

In einem stationären Plasma mögen sich die Elektronen mit einer Geschwindigkeit \vec{v}_e bewegen und die Stoßpartner sollen in Ruhe sein. Dann folgt aus der Bewegungsgleichung (Glg. 4.19)

$$\vec{E} + \vec{v}_e \times \vec{B} = -\frac{m_e \nu}{e} \vec{v}_e.$$

Der Strom ist immer noch gegeben durch $\vec{j} = -en_e \vec{v}_e$, was es uns erlaubt, die Geschwindigkeit durch den Strom auszudrücken. Wir können die obige Gleichung nun umschreiben in

$$\vec{j} = \sigma_0 \vec{E} - \frac{\sigma_0}{n_e e} \vec{j} \times \vec{B}, \quad (4.24)$$

wo wir den Ausdruck 4.23 für die Leitfähigkeit verwendet haben. Wir definieren nun unser Bezugssystem so, dass die z -Achse mit der Richtung des Magnetfeldes \vec{B} zusammenfällt, $\vec{B} = B\hat{z}$. Nach etwas Rechnen erhält man

$$\begin{aligned} j_x &= \sigma_0 E_x + \frac{\omega_{ge}}{\nu} j_y, \\ j_y &= \sigma_0 E_y - \frac{\omega_{ge}}{\nu} j_x, \\ j_z &= \sigma_0 E_z, \end{aligned} \quad (4.25)$$

wo die Elektronenzyklotronfrequenz ω_{ge} das Ladungsvorzeichen mit beinhaltet. Wir eliminieren j_y aus der ersten und j_x aus der zweiten Gleichung und erhalten

$$\begin{aligned} j_x &= \frac{\nu^2}{\nu^2 + \omega_{ge}^2} \sigma_0 E_x + \frac{\omega_{ge}\nu}{\nu^2 + \omega_{ge}^2} \sigma_0 E_y, \\ j_y &= \frac{\nu^2}{\nu^2 + \omega_{ge}^2} \sigma_0 E_y - \frac{\omega_{ge}\nu}{\nu^2 + \omega_{ge}^2} \sigma_0 E_x, \\ j_z &= \sigma_0 E_z. \end{aligned} \quad (4.26)$$

Wir können nun in den hier benutzten Koordinatensystem den Leitfähigkeitstensor ablesen:

$$\vec{j} = \sigma \cdot \vec{E}, \quad \text{wo } \sigma = \begin{pmatrix} \sigma_P & -\sigma_H & 0 \\ \sigma_H & \sigma_P & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{\parallel} \end{pmatrix} \quad (4.27)$$

mit den Komponenten

$$\begin{aligned} \sigma_P &= \frac{\nu^2}{\nu^2 + \omega_{ge}^2} \sigma_0, \\ \sigma_H &= -\frac{\omega_{ge}\nu}{\nu^2 + \omega_{ge}^2} \sigma_0, \\ \sigma_{\parallel} &= \sigma_0 = \frac{n_e e^2}{m_e \nu}. \end{aligned} \quad (4.28)$$

Das Tensorelement σ_P ist die sog. Pedersen-Leitfähigkeit und bestimmt den Pedersen-Strom, der in die Richtung des elektrischen Feldes \vec{E}_{\perp} fließt, welches transversal zum Magnetfeld steht. Die Hall-Leitfähigkeit σ_H bestimmt den Hall-Strom in die Richtung senkrecht zum Magnetfeld und elektrischen Feld, nämlich in $-\vec{E} \times \vec{B}$ -Richtung. Das Element σ_{\parallel} ist die parallele Leitfähigkeit und bestimmt den Strom entlang des magnetischen Feldes. Im unmagnetisierten Fall entspricht σ_{\parallel} der Plasma-Leitfähigkeit.

Kann man das Koordinatensystem nicht so legen, wie wir es jetzt der Einfachheit halber getan haben, so kann Glg. 4.27 trotzdem in parallele und senkrechte Anteile umgeschrieben werden indem man das Kreuzprodukt von Glg. 4.24 mit \vec{B} bestimmt und das Resultat zur Eliminierung von $\vec{j} \times \vec{B}$ in Glg. 4.24 verwendet.

$$\vec{j} = \sigma_{\parallel} \vec{E}_{\parallel} + \sigma_P \vec{E}_{\perp} - \sigma_H (\vec{E}_{\perp} \times \vec{B}) / B. \quad (4.29)$$

Übung 4.3 *Tun sie dies!*

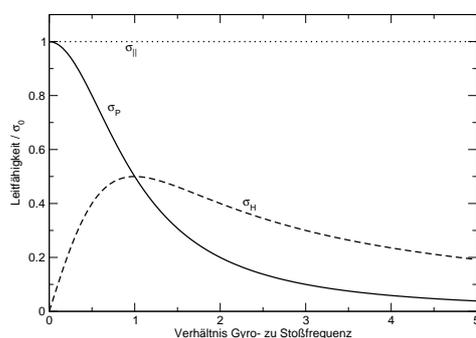


Abbildung 4.10: Pedersen-, Hall- und parallele Leitfähigkeiten σ_P , σ_H und $\sigma_{||}$ in Abhängigkeit vom Verhältnis Gyro- zu Stoßfrequenz.

Die parallele Leitfähigkeit ist unabhängig von der Gyrofrequenz, während die Pedersen- und Hall-Leitfähigkeiten eine andere Abhängigkeit aufweisen. Schreiben wir sie so um, dass in ihnen nur noch das Verhältnis von Gyro- zu Stoßfrequenz vorkommt, so finden wir das in Abb. 4.10 gezeigte Verhalten. Ist das Plasma stoßdominiert ($\omega/\nu < 1$), so überwiegt die Pedersen-Leitfähigkeit. In diesem Fall stößt ein Plasmateilchen statistisch bevor es eine Gyration durchführen konnte. Die Hall-Leitfähigkeit beginnt zu überwiegen, wenn es mindestens eine Gyration durchführen kann, bevor es wieder einen Stoß erlebt. Die parallele Leitfähigkeit überwiegt immer.

In der Ionosphäre tragen nicht nur die Elektronen sondern auch die Ionen zur Leitfähigkeit bei. Die Ionen müssen dieselbe Gleichung 4.29 erfüllen. Deshalb kann deren Beitrag einfach zur bereits berechneten Leitfähigkeit addiert werden. Wir erhalten dann

$$\begin{aligned}
 \sigma_P &= \left(\frac{\nu_{en}}{\nu_{en}^2 + \omega_{ge}^2} + \frac{m_e}{m_i} \frac{\nu_{in}}{\nu_{in}^2 + \omega_{gi}^2} \right) \frac{n_e e^2}{m_e}, \\
 \sigma_H &= - \left(\frac{\omega_{ge}}{\nu_{en}^2 + \omega_{ge}^2} - \frac{m_e}{m_i} \frac{\omega_{gi}}{\nu_{in}^2 + \omega_{gi}^2} \right) \frac{n_e e^2}{m_e}, \\
 \sigma_{||} &= \left(\frac{1}{\nu_{en} + \frac{m_e}{m_i} \frac{1}{\nu_{in}}} \right) \frac{n_e e^2}{m_e}.
 \end{aligned} \tag{4.30}$$

Die Leitfähigkeit wird also einerseits durch die Stoßfrequenzen der Ionen und Elektronen mit dem Neutralgas bestimmt, andererseits durch die Gyrofrequenzen der Ionen und Elektronen im Magnetfeld. Diese sind in der E-Region der Ionosphäre fast konstant, weil sich das irdische Magnetfeld in diesem recht engen Höhenbereich nicht stark ändert. Abb. 4.11 zeigt die Beweglichkeit von Elektronen und Ionen in dieser Region. Die Gyrofrequenzen der Elektronen und (Sauerstoff-)Ionen sind als konstante (höhenunabhängige) gestrichelte Linien eingezeichnet. Die Stoßfrequenzen mit dem Neutralgas sind als durchgezogenen Linien sichtbar. Unterhalb ca. 75 km sind Elektronen und Ionen durch Stöße mit dem Neutralgas dominiert. Darüber überwiegt für Elektronen bis ca. 125 km Höhe die Gyrofrequenz. Über dieser Schicht ist auch die Ionengyrofrequenz größer als deren Stoßfrequenz mit dem Neutralgas.

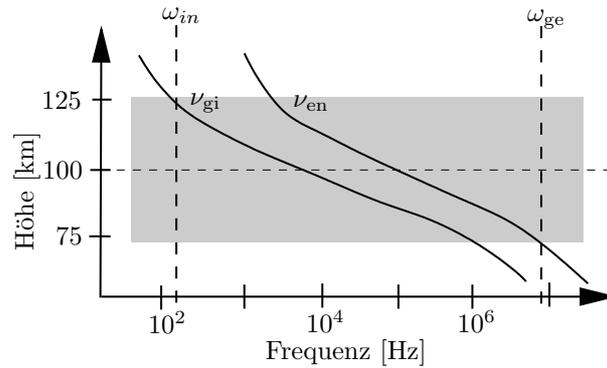


Abbildung 4.11: Beweglichkeit von Elektronen und Ionen in der Ionosphäre. Nach *Baumjohann* und *Treumann* (1997).

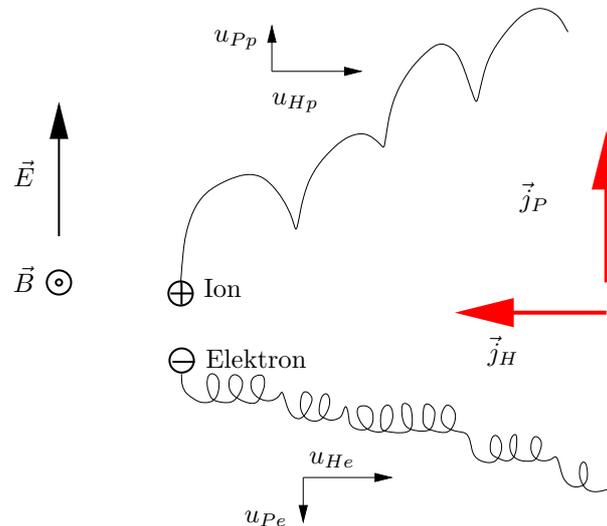


Abbildung 4.12: Hall- und Pedersenströme. Nach *Prölss* (2004).

4.3 Ströme in der Ionosphäre

Die soeben beschriebene unterschiedliche Beweglichkeit der Elektronen und Ionen in der sog. **ionosphärischen Dynamoschicht** hat Konsequenzen, die wir hier besprechen wollen. In etwa 75 km Höhe stoßen Elektronen erst nach einem vollständigen Umlauf (nach einer Gyroperiode) und darüber noch seltener mit einem neutralen Gaspartikel. In etwa 100 km Höhe stoßen sie erst nach etwa 100 Gyrationen mit einem Neutralgaspartikel und können deshalb, wie in Abb. 4.12 gezeigt, einen Hall-Strom führen. Die Ionen bleiben aber in dieser Höhenregion immer an das Neutralgas gebunden. Sie stoßen viel öfter (etwa 100 Mal) mit Neutralgaspartikeln, als dass sie eine Gyration durchführen könnten¹, weshalb sie sich mit dem Neutralgas bewegen müssen. Ab etwa 125

¹Die Stoßprozesse sind von ihrer Natur her stochastisch während die Gyration als deterministisch aufgefasst werden kann.

km Höhe sind auch die Ionen vom Neutralgas unabhängig und bewegen sich, wie die Elektronen, auf Bahnen, die durch systematische Bewegungen und das Magnetfeld vorgeschrieben werden. Deshalb sind die in Abb. 4.12 gezeigten Hall- und Pedersenströme auch so unterschiedlich. Die Elektronen können also bereits ab 100 km eine $\vec{E} \times \vec{B}$ -Drift spüren, die Ionen nicht. Die Elektronen führen deshalb einen Hallstrom senkrecht zu \vec{E} und \vec{B} , während die Ionen noch durch ihre häufigen Stöße an das Neutralgas gebunden sind. Die Ionen, die bis in eine Höhe von ca. 125 km vor einer jeden Gyration durch einen Stoß mit einem Neutralteilchen wieder isotrop gestreut werden, vermögen erst oberhalb von ca. 125 km einen Pedersen-Strom zu führen. Dieser folgt im Wesentlichen dem elektrischen Feld und ist also senkrecht zum Hall-Strom der Elektronen gerichtet. Oberhalb der E-Region sind Stöße zwischen geladenen und neutralen Teilchen sowohl für Elektronen wie auch für Ionen selten und wir haben für Ionen wie auch Elektronen denselben $\vec{E} \times \vec{B}$ -Drift zu verzeichnen.

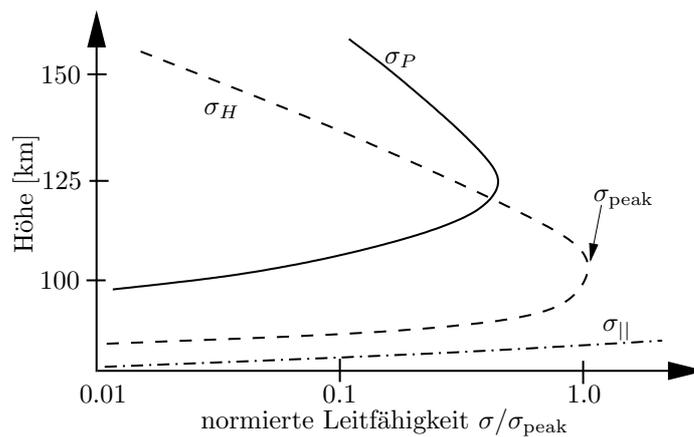


Abbildung 4.13: Leitfähigkeiten in der Ionosphäre normiert auf den maximalen Wert der Hall-Leitfähigkeit. Nach *Baumjohann* und *Treumann* (1997).

Abbildung 4.13 fasst die ionosphärischen Leitfähigkeiten zusammen. Die parallele Leitfähigkeit ist immer größer als Hall- oder Pedersen-Leitfähigkeit. Unterhalb ca. 125 km dominiert die Hall-Leitfähigkeit, darüber die Pedersen-Leitfähigkeit. Dieser Sachverhalt äußert sich darin, dass die Ströme in der Ionosphäre fast ausschließlich parallel zum Magnetfeld fließen und die elektrischen Felder deshalb auch nur senkrecht dazu entstehen. Die soeben besprochenen Hall- und Pedersenströme sind klein im Vergleich zu den Strömen parallel zu \vec{B} .

Beobachtungen von systematischen Abnahmen der geomagnetischen Feldstärke um die Mittagszeit (Abb. 4.14) haben schon Gauß dazu geführt, Ströme in der oberen Atmosphäre als eine mögliche Erklärung heranzuführen. Diese Ströme werden durch thermosphärische Winde induziert, wie wir im Folgenden sehen werden. Wir definieren dazu ein Koordinatensystem in welchem die z -Achse parallel zum Magnetfeld stehe und die Winde senkrecht dazu in x -Richtung fließen. Der Einfachheit halber nehmen wir an, dass \vec{B} senkrecht

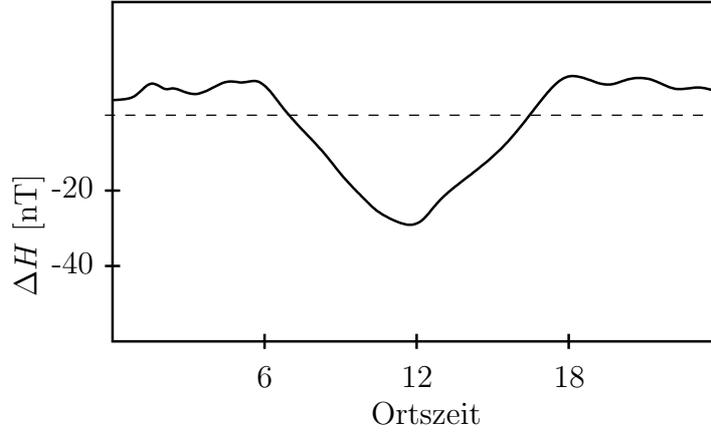


Abbildung 4.14: Typische Abweichung der mittleren horizontalen Komponente des geomagnetischen Feldes von seinem Mittelwert in mittleren Breiten während ruhigen Bedingungen.

auf der Erdoberfläche stehe und die Winde parallel dazu. Die Bewegungsgleichung in der horizontalen Richtung lautet im stationären Gleichgewicht

$$n_q q_q \vec{u}_q \times \vec{B} + n_q m_q \nu_{q,n}^* (\vec{u}_n - \vec{u}_q) = 0, \quad (4.31)$$

wo der Index q für Ionen oder Elektronen steht und n für das Neutralgas. Komponentenweise lautet die Gleichung

$$\begin{aligned} q_q u_{q,y} B + m_q \nu_{q,n}^* (u_n - u_{q,x}) &= 0, \\ -q_q u_{q,x} B - m_q \nu_{q,n}^* u_{q,y} &= 0. \end{aligned} \quad (4.32)$$

Die Lösungen sind

$$\begin{aligned} u_{q,x} &= \frac{(\nu_{q,n}^*)^2}{(\nu_{q,n}^*)^2 + \omega_q^2} u_n, \\ u_{q,y} &= -\frac{\nu_{q,n}^* \omega_q}{(\nu_{q,n}^*)^2 + \omega_q^2} u_n, \end{aligned} \quad (4.33)$$

wo $\omega = qB/m_q$ die Gyrofrequenz und $\nu_{q,n}^*$ die Stoßfrequenz der Teilchensorte q mit dem Neutralgas ist.

Mit Abb. 4.11 können wir nun die Ströme in der Ionosphäre abschätzen. In der grau schattierten Dynamo-Schicht gilt $\nu_{i,n}^* \gg \omega_i$ und $\nu_{e,n}^* \ll \omega_e$. Damit werden Glg. 4.33 zu

$$\begin{aligned} u_{i,x} \approx u_n \quad \text{und} \quad u_{e,x} \approx (\nu_{e,n}^*/\omega_e)^2 u_n \ll u_{i,x} \\ u_{i,y} \approx -(\omega_i/\nu_{i,n}^*) u_n \ll u_{i,x} \quad \text{und} \quad u_{e,y} \approx (\nu_{e,n}^*/\omega_e) u_n \ll u_{i,x}. \end{aligned} \quad (4.34)$$

Wegen den zahlreichen Stößen mit dem Neutralgas fließen die Ionen im Wesentlichen mit dem Neutralgas während die elektronen an das Magnetfeld gebunden sind. Folglich fließt eine Stromdichte

$$j_x \approx enu_n.$$

Für $u_n \approx 75 \text{ m/s}$ und $n_q \approx 10^{11} \text{ m}^{-3}$ erhalten wir eine Stromdichte von ca. $1.2 \mu\text{A/m}^2$. Mit einer Dicke der Schicht von ca. 50 km erhalten wir $\mathcal{J} \approx 60 \text{ mA/m}$, was die horizontale Komponente des geomagnetischen Feldes um etwa 50 nT bewirkt ($\Delta H \approx \mu_0 \mathcal{J}/2 \approx 50 \text{ nT}$).

Dieser Effekt kann auch als ionosphärische Dynamo aufgefasst werden. Die Wind-induzierten Ströme erzeugen ein elektrisches Dynamo-feld $\vec{E} \approx \vec{u}_n \times \vec{B}$.

4.3.1 Der äquatoriale Elektrojet

Am Äquator herrschen besonders starke thermosphärische Winde, die zum sog. **äquatorialen Elektrojet** führen, der in einer Breite von einigen hundert Kilometern um diese Region das geomagnetische Feld (50 - 100 nT) verändert. Am Äquator ist das geomagnetische Feld fast parallel zur Erdoberfläche und zeigt von Süd nach Nord entlang der x -Achse. Ein durch die Wechselwirkung des Sonnenwindes mit der Magnetosphäre erzeugtes globales primäres elektrisches Feld \vec{E}_p zeigt hier tagsüber von West nach Ost, siehe Abb. 4.15. Zusammen mit dem Magnetfeld führt dies zu einem ostwärts gerichteten Pedersen-Strom und einen abwärts gerichteten Hall-Strom. Dadurch werden in der Dynamo-Schicht Ladungen getrennt, die Elektronen fließen nach oben, die Ionen nach unten, wodurch sich ein sekundäres elektrisches Feld \vec{E}_{sek} aufbaut, welches nach oben zeigt. Dieses sekundäre Polarisationsfeld erzeugt einen sekundären Pedersen-Strom, der so lange wächst, bis er den primären Hall-Strom gerade kompensiert.

$$j_z = \sigma_H E_{\text{prim}} + \sigma_p E_{\text{sek}} = 0, \quad \text{also} \quad \vec{E}_{\text{sek}} = -\frac{\sigma_H}{\sigma_p} \vec{E}_{\text{prim}}. \quad (4.35)$$

Gleichzeitig erzeugt dieses sekundäre elektrische Feld aber auch einen sekundären Hall-Strom, $j_{\text{H,sek}} = -\sigma_H \vec{E}_{\text{sek}} = \frac{\sigma_H^2}{\sigma_p} \vec{E}_{\text{prim}}$, der parallel zum primären Pedersen-Strom fließt und wir haben als Summe der Ströme

$$j_{\text{aeq}} = j_{\text{p,prim}} + j_{\text{H,sek}} = \sigma_p \vec{E}_{\text{prim}} - \sigma_H \vec{E}_{\text{sek}} = \sigma_p \vec{E}_{\text{prim}} + \frac{\sigma_H^2}{\sigma_p} \vec{E}_{\text{prim}} \doteq \sigma_C \vec{E}_{\text{prim}}, \quad (4.36)$$

wo σ_C die sog. **Cowling Leitfähigkeit** ist,

$$\sigma_C = \sigma_p + \frac{\sigma_H^2}{\sigma_p}, \quad (4.37)$$

welche für typische Werte für das Verhältnis $\sigma_H/\sigma_p \approx 4$ wesentlich größer als die Pedersen-Leitfähigkeit wird und so die sehr hohen Stromdichten am Äquator erklären kann.

4.4 Aurorae

Fehlt z. Zt. noch.

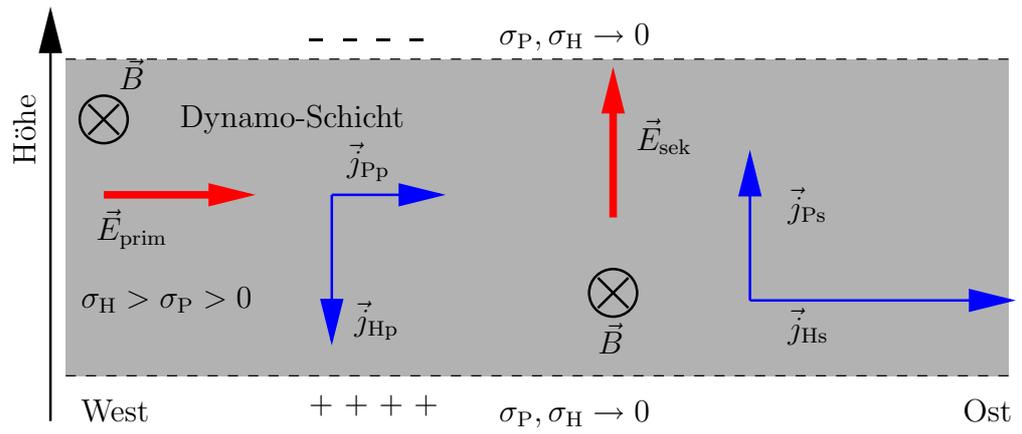


Abbildung 4.15: Entstehung des äquatorialen Elektrojets.

Kapitel 5

Heliosphäre und Sonnenwind

5.1 Die lokale interstellare Umgebung

Unser Sonnensystem ist Bestandteil unserer Milchstraße oder Galaxie. Diese zieht sich wie ein Band von diffusem Licht über den klaren Nachthimmel. Diese Erscheinung führte denn auch zu ihrem Namen Milchstraße oder Galaxie, was vom griechischen Wort für Milch stammt. Auch die Römer haben diesen Namen für die Milchstraße gewählt, “Via Lactea”. Erst mit Galileo wurde klar, dass die Milchstraße aus einer Ansammlung unzähliger Sterne besteht, welche durch das bloße Auge nicht aufgelöst werden können.

Heute wissen wir, dass unsere Milchstraße eine unter vielen ist. Dies war noch vor hundert Jahren gar nicht klar. Damals galten die sog. Spiralnebel als galaktische Erscheinungen, also als weitere Bestandteile unserer Milchstraße. Mit dem Aufkommen der Photographie in der Astronomie wurde es möglich, die Lage der Sonne in der Milchstraße quantitativ zu erfassen. Erste Modelle stellten das Sonnensystem in die Nähe des galaktischen Zentrums, das sog. Kapteyn-Modell. Die Erforschung von Kugelhaufen ermöglichte ein verbessertes Bild unserer Lage. Diese Ansammlungen von ca. 10^4 - 10^6 Sternen sind nicht auf die galaktische Ebene beschränkt, sondern füllen eine Kugel um das galaktische Zentrum. Weil die Absorption außerhalb der galaktischen Scheibe wesentlich kleiner ist als innerhalb, wurde es nun möglich, die Lage und insbesondere auch die Größe der Galaxie zu bestimmen. Sie war dann etwa zehn Mal größer, als damals von Kapteyn vermutet. Eine spannende Einführung in die Geschichte der galaktischen Astronomie geben *Binney und Merrifield* (1998).

Unsere Galaxie enthält etwa 10^{11} Sterne, die meisten (die Sterne der “Population I”) verteilt über ein diskus- oder scheibenförmiges Volumen mit einem Durchmesser von etwa 80'000 Lichtjahren (ly) oder 25 kiloparsec (kpc) und einer Dicke von ungefähr 2 kpc oder 6500 ly. Ein kugelförmiges Gebiet mit gleichem Durchmesser wie die Scheibe wird als “Halo” bezeichnet und enthält die meisten (älteren) Sterne der Population II.

Die Sonne liegt heute in einem Abstand von ca. 8.5 ± 1 kpc vom galaktischen Zentrum (*Lang*, 1999). Die Umlaufgeschwindigkeit beträgt ca. 220 ± 20 km/s,

was einer Umlaufperiode von etwa 250 Millionen Jahren entspricht. Der durchschnittliche Abstand der Sterne in der Milchstraße ist etwa 10 ly, der Raum dazwischen ist aber nicht leer, sondern gefüllt von einem stark verdünnten Medium, dem interstellaren Medium. Es besteht aus Plasma, Staub, Neutralgas, Magnetfeld, der kosmischen Strahlung, der 2.7 K Hintergrundstrahlung und dem Sternenlicht. Alle Komponenten tragen ungefähr gleich viel zur Energiedichte des ISM bei, was eine mathematische Behandlung äußerst schwierig macht, weil keine der Komponenten vernachlässigt werden kann.

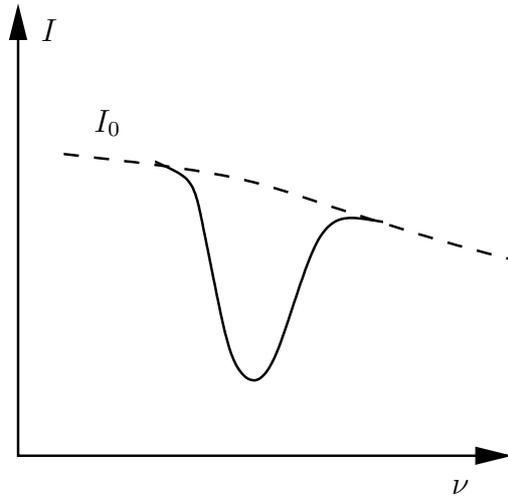


Abbildung 5.1: Erklärung zu Formel 5.5.

Auskunft über die großräumige Struktur des interstellaren Mediums erhält man z. B. indem man Absorptionslinien gegen Sterne untersucht. Liegen zwischen einem Stern und dem Beobachter mehrere optisch dünne interstellare Wolken, so wird dies in einer Kombination von mehreren Gaußschen und einem Lorentz-Profil sichtbar, denn die Wolken können z. B. verschiedene Temperaturen haben. Wir definieren einen frequenz- und ortsabhängigen Absorptionskoeffizienten κ_ν

$$\kappa_\nu(s, \nu) \doteq n(s)\sigma(\nu), \quad (5.1)$$

wo $n(s)$ die ortsabhängige Dichte und $\sigma(\nu)$ der frequenzabhängige Absorptionsquerschnitt (inkl. Streuung) ist. Unter Vernachlässigung der Emission erhalten wir für den Intensitätsverlust einer Linie

$$dI(\nu) = -\kappa_\nu(s)I(\nu)ds. \quad (5.2)$$

Die optische Tiefe wird wieder definiert als

$$\tau_\nu \doteq \int_{s_1}^{s_2} \kappa_\nu(s) ds. \quad (5.3)$$

Gleichung 5.2 kann einfach integriert werden und hat die Lösung

$$I(\nu) = I_0(\nu)e^{-\tau(\nu)}, \quad (5.4)$$

wo I_0 die Intensität außerhalb der Absorptionslinie sei. Oft wird nun eine "äquivalente Breite" W definiert,

$$W \doteq \int_{\nu_1}^{\nu_2} \frac{I_0 - I(\nu)}{I_0} d\nu. \quad (5.5)$$

Ist die Absorption klein, bzw. die optische Tiefe klein ($\tau \ll 1$), so gilt

$$W \approx \int_{\nu_1}^{\nu_2} \tau d\nu = \int_{\nu_1}^{\nu_2} d\nu \int_{s_1}^{s_2} n(s) \sigma(\nu) ds,$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{\nu_1}^{\nu_2} \sigma(\nu) d\nu \int_{s_1}^{s_2} n(s) ds, \\
&= \int_{\nu_1}^{\nu_2} \sigma(\nu) d\nu N, \\
&= N \bar{\sigma} \Delta\nu,
\end{aligned} \tag{5.6}$$

wo N die Kolonnendichte entlang der Sichtlinie und $\bar{\sigma}$ der mittlere Absorptionsquerschnitt ist. Damit kann aus der Breite einer optisch dünnen Absorptionslinie auf die Kolonnendichte zwischen Quelle und Beobachter geschlossen werden.

Aus solchen Beobachtungen fand *Dame* (1993) die radiale Verteilung der Oberflächendichte von H I und H₂ in der Galaxie. Sie ist in Abb. 5.2 abgebildet. Die Kurven berücksichtigen einen endlichen Anteil von ca. 10% He.

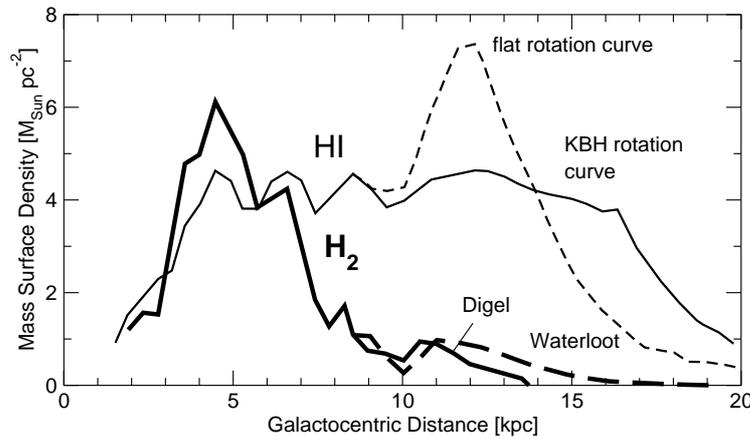


Abbildung 5.2: Radiale Verteilung der heutigen Oberflächendichte von Wasserstoff (HI und H₂). Nach *Dame* (1993).

In der unmittelbaren interstellaren Umgebung ist es einfacher, Werte für die Eigenschaften des interstellaren Mediums zu erhalten. Das Sonnensystem liegt eingebettet in einer interstellaren Wolke mit einer Dichte von ungefähr 0.1 cm^{-3} und einer kinetischen Temperatur von $T \approx 7000\text{K}$ (*Fahr*, 1996; *Frisch*, 1996; *Linsky et al.*, 2000). Schätzwerte streuen aber, je nach Autor, um fast eine Größenordnung. Kolonnendichten hin zu nahen Sternen streuen noch wesentlich stärker, je nach Richtung und Distanz zum nächsten Stern entlang der Sichtlinie. Schaut man hin zum galaktischen Zentrum, erreichen die Kolonnendichten Werte bis zu ca. 10^{20} cm^{-3} bei einigen zehn Parsec und $2 \times 10^{21} \text{ cm}^{-2}$ vor 200 pc. In der entgegengesetzten Richtung erreichen sie nicht einmal $2 \times 10^{18} \text{ cm}^{-2}$ bei 200 pc (*Gry*, 1996). Für diese Diskrepanzen gibt es verschiedene Interpretationen, die am besten akzeptierte ist, dass sich das Sonnensystem heute am Rand der lokalen interstellaren Wolke (LIC) befindet und diese in etwa 3000 Jahren verlassen wird (*Linsky et al.*, 2000). Eine ‘Karte’ der lokalen interstellaren Umgebung ist in Abb. 5.3 gegeben. Die lokale interstellare Wolke ist in eine dünnere Blase eingebettet, die ‘lokale Blase’ (local bubble), welche eine niedrigere Dichte aber dafür eine höhere Temperatur hat.

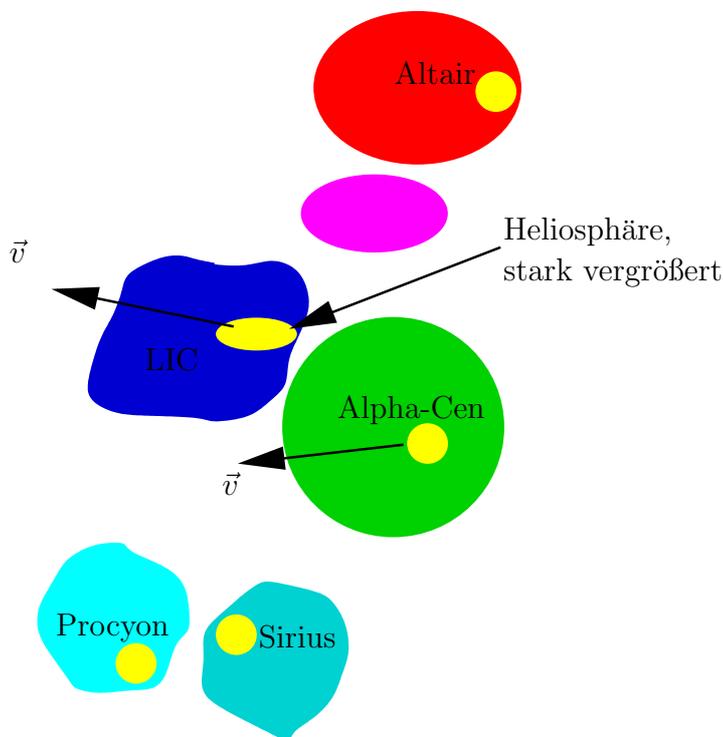


Abbildung 5.3: Die (unmittelbare) lokale interstellare Umgebung des Sonnensystems. Nach *Lallement* (1996). Die lokale interstellare Wolke (local interstellar cloud, LIC) bewegt sich mit einer Geschwindigkeit \vec{v} nach links (vom galaktischen Zentrum weg). Die Heliosphäre (stark vergrößert dargestellt) wird sie in einigen tausend Jahren verlassen und anschließend die G-Wolke um Alpha-Centaury eindringen.

Sie ist wahrscheinlich ein Überbleibsel einer Supernova (*Frisch*, 1996). Innerhalb der Blase wird der sog. "local fluff" beobachtet, die LIC könnte ein solches sein. Innerhalb der LIC könnte es kalte und dichte Klumpen mit Ausdehnungen von 5 - 100 AU geben (*Frisch*, 1996). Innerhalb der letzten 4-5 Millionen Jahre muss die Sonne durch die stark verdünnte lokale Blase passiert und vor etwa 100'000 Jahren in die LIC eingedrungen sein. Die Geschichte bevor sie in die LIC eingedrungen ist, ist nicht bekannt.

5.2 Struktur der Heliosphäre

Die Struktur der Heliosphäre wird durch Randbedingungen an der Sonne, zum interstellaren Medium und "innere" Randbedingungen, z. B. die Ionisation von interstellarem Material innerhalb der Heliosphäre bestimmt. Wir werden hier nicht auf alle Details eingehen können, sondern die Struktur der Heliosphäre nur in ihren Grundzügen diskutieren. Mehr darüber in einer weiterführenden Vorlesung (siehe <http://www.ieap.uni-kiel.de/et/people/wimmer/teaching/et2/>).

Der von der Sonne radial und supersonisch ausgehende Sonnenwind muss

irgendwo auf das interstellare Medium treffen. Seine Dichte nimmt dabei mit $1/r^2$ ab, weshalb auch sein Rammdruck so abnimmt. Irgendwo muss dieser Rammdruck ins Gleichgewicht mit dem Druck im interstellaren Medium kommen. Im einfachsten Fall muss also gelten

$$\text{Rammdruck} = \frac{1}{2} m_p n_0 \frac{r_0^2}{r^2} v_0^2 = p_{\text{is}} = \text{interstellarer Druck.} \quad (5.7)$$

Dabei muss der Sonnenwind von supersonisch auf subsonisch abgebremst werden, denn er kann sich dort ja nicht immer mehr anstauen, sondern muss seitlich wegfließen. Damit die Information des Hindernisses LISM auf den Sonnenwind übertragen werden kann, muss dieser langsamer werden, als die Geschwindigkeit, mit der Informationen in diesem dünnen Plasma übertragen werden können. Diese Geschwindigkeit ist die schnelle magnetosonische Geschwindigkeit. Der Sonnenwind muss also langsamer werden als diese Geschwindigkeit. Dies geschieht einerseits durch eine Verlangsamung (und eine anschließende Ablenkung) und andererseits durch eine Heizung. Durch die Verlangsamung steigt die magnetische Feldstärke und damit die Alfvéngeschwindigkeit, durch die Heizung erhöht sich die Schallgeschwindigkeit.

Durch die soeben diskutierten Effekte muss der Sonnenwind am sog. Termination Shock subsonisch bzw. subalfvénisch werden. Er muss hier auch "zur Seite" ausweichen, Massen-, Impuls- und Energiefluss müssen erhalten bleiben (die sog. Rankine-Hugoniot-Beziehungen, siehe Abschnitt 5.5.1). Berücksichtigung dieser und anderer Faktoren ändert Glg. 5.7 auf (*Parker, 1963*)

$$\left(\frac{r_s}{r_0}\right)^2 = \frac{\rho_0 v_0^2}{p_{\text{is}}} \left\{ \frac{2}{\gamma + 1} \left[\frac{(\gamma + 1)^2}{4\gamma} \right]^{\gamma/(\gamma-1)} \right\} \approx 0.88 \frac{\rho_0 v_0^2}{p_{\text{is}}}, \quad (5.8)$$

wo γ das Verhältnis der spezifischen Wärmen ist und der numerische Wert von 0.88 für $\gamma = 5/3$ gilt. Bei bekannter Dichte und Geschwindigkeit des Sonnenwindes und des Drucks im interstellaren Medium kann also so der Abstand zum Termination Shock bestimmt werden.

Übung 5.1 *Schätzen Sie den interstellaren Druck ab und bestimmen Sie den Abstand zum Termination Shock.*

Man kann das auch anders verstehen. An der Grenzfläche zwischen Sonnenwind und interstellarem Medium, der sog. Heliopause, bildet sich eine Druckwelle, die sich nach hinten, in den anströmenden Sonnenwind, bewegt. Wir werden weiter unten sehen, wie sich eine solche Druckwelle durch nicht-lineare Prozesse aufsteilt und eine Stoßwelle bildet. Diese wird Termination Schock genannt, weil dort der supersonische Sonnenwind aufhört. Der Termination Schock ist der Ort, an dem dieser nominell von super- auf subsonisch abgebremst wird. Das Gebiet zwischen Termination Schock und Heliopause wird Heliosheath genannt.

Von der anderen Seite der Heliopause strömt auch das LISM mit einer Geschwindigkeit von ca. 26 km/s auf die Heliosphäre zu. Ob sich hier auch eine

Stoßwelle bildet, hängt entscheidend von der nur schlecht bekannten Stärke des interstellaren Magnetfeldes ab. Die Existenz eines Bow-Shocks (Bug-Stoßwelle) ist deshalb nicht sicher. Das Gebiet um die Heliopause ist stark turbulent und eine wichtige Diffusionsbarriere für die galaktische kosmische Strahlung.

Erste Beobachtungen der Heliopause wurden 1983/1984 gemacht, ohne allerdings zu realisieren, was dabei beobachtet wurde. Erst eine Wiederholung der Umstände 1992/1993 erlaubte eine Identifizierung der heliosphärischen Ursachen der Beobachtungen. Große koronale Massenauswürfe 1983/1984 führten zu einer deutlichen Emission von Radiostrahlung, die durch das Radioexperiment auf Voyager registriert wurde. Die Massenauswürfe führten u. a. auch zu einer Modulation der galaktischen kosmischen Strahlung, die z. B. durch den Kieler Neutronenmonitor gemessen wird. Solche Abnahmen infolge von koronalen Massenauswürfen nennt man Forbush-decrease. Die Radioemission wurde etwa ein Jahr später registriert. Diese Beobachtungen wiederholten sich 1992/1993, was denn *Gurnett et al.* (1993) eine Identifikation der Ursachen erlaubte (siehe Abb. 5.4 und 5.5).

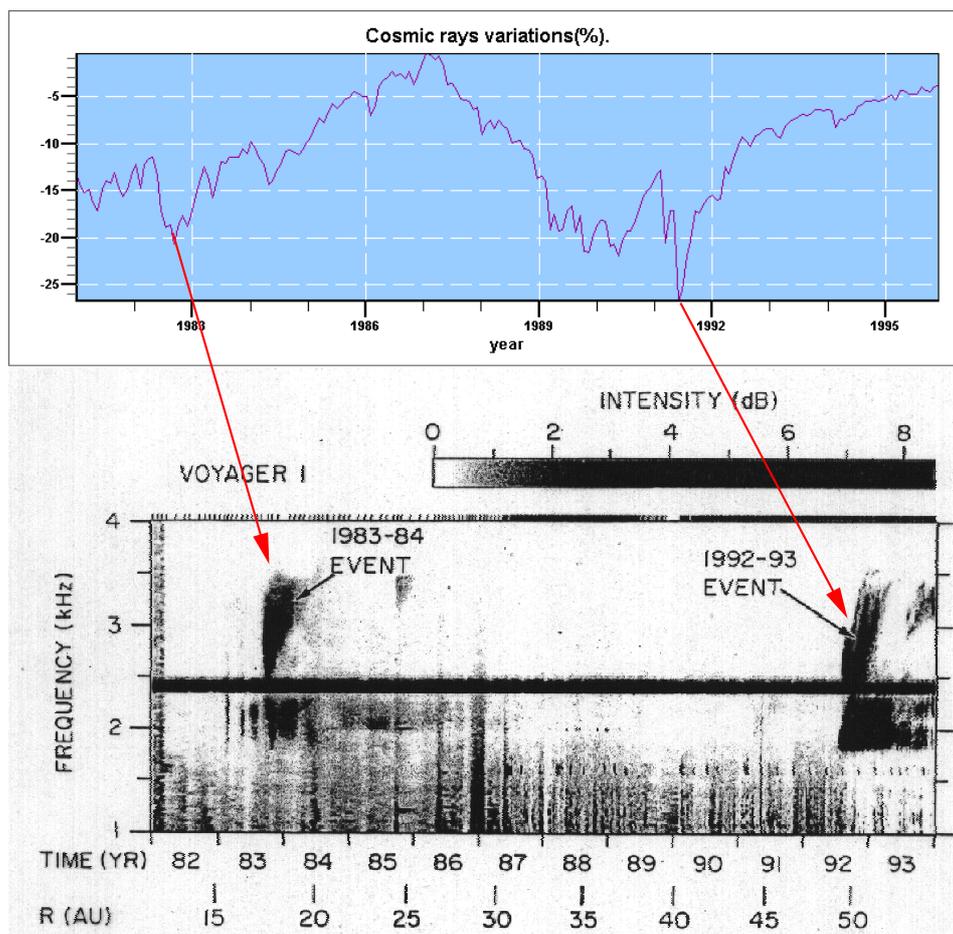


Abbildung 5.4: Oben: Zählraten des Kieler Neutronenmonitors. Unten: Beobachtungen von *Gurnett et al.* (1993).

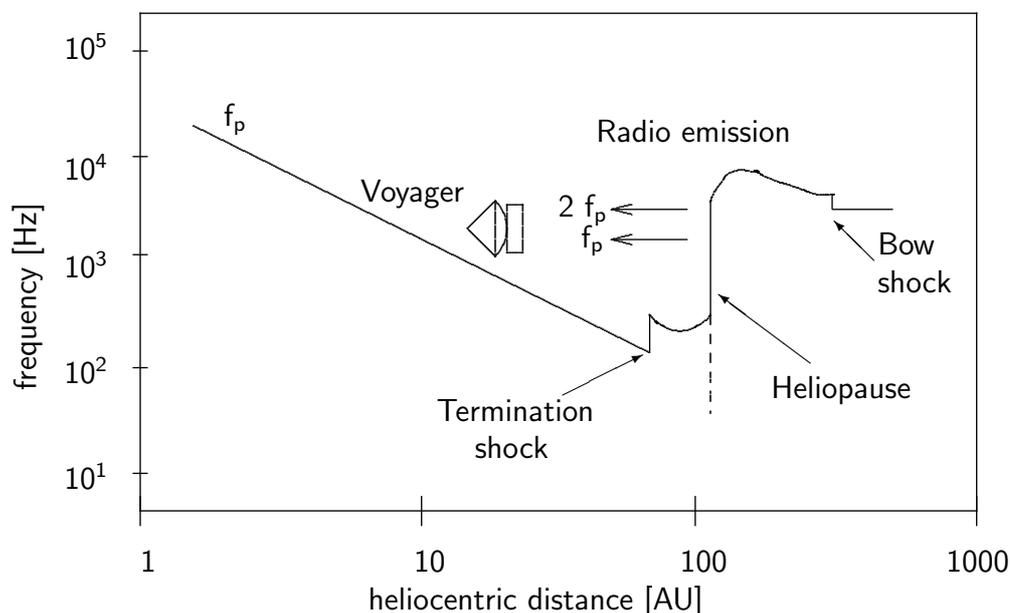


Abbildung 5.5: Schema zur Erklärung der Messungen von *Gurnett et al.* (1993).

Seither haben beide Voyager Sonden den Termination Schock in-situ entdeckt und dabei unerwartete Beobachtungen gemacht. ZU Zeit befinden sie sich an einem Ort, an dem der Sonnenwind fast nur noch zur Seite wegfließt.

5.2.1 Rasensprenger, Archimedes und Parker

Bisher haben wir in allen Betrachtungen das Magnetfeld der Sonne vernachlässigt. Dies ist eine grobe Vereinfachung, wie die folgende Abschätzung zeigt. Die thermische Energie des Sonnenwindes beträgt bei 1 AE ca.

$$E_{\text{therm}} = nkT \approx 10^{-11} \text{ J/m}^3, \quad (5.9)$$

was mit der magnetischen Feldenergie verglichen werden muss,

$$E_{\text{mag}} = \frac{B^2}{2\mu_0} \approx 10^{-11} \text{ J/m}^3. \quad (5.10)$$

Die beiden Energiedichten sind etwa ähnlich groß, dies bedeutet, dass der Wert für das sogenannte Plasma β

$$\beta \doteq \frac{P_{\text{Gas}}}{P_{\text{mag}}} = \frac{2\mu_0 nkT}{B^2} \quad \left(\approx \frac{c^2}{v_{\text{Alfven}}^2} \right), \quad (5.11)$$

in der Nähe der Erde um den Wert 1 liegt. Sehr nahe an der Sonne wird β sehr klein, d.h. das Magnetfeld dominiert die inhärenten Eigenschaften des Plasmas.

Um das Verhalten des Plasmas und damit des Magnetfeldes im interplanetaren Raum beschreiben zu können, bedienen wir uns der sogenannten Magnetohydrodynamik (MHD). Diese beschreibt ein Plasma in der Näherung einer global elektrisch neutralen aber magnetisierten Flüssigkeit, in der zeitliche

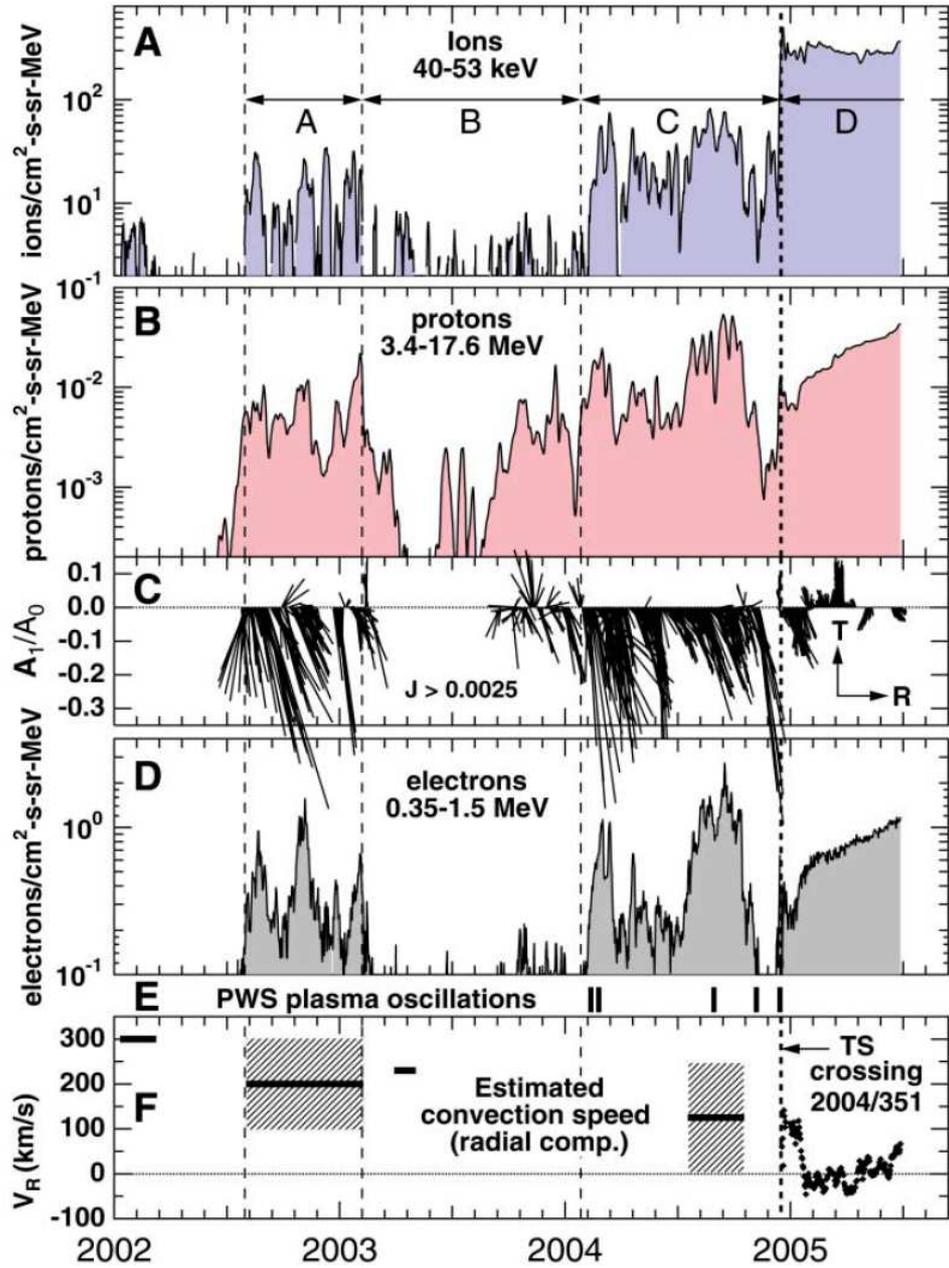


Abbildung 5.6: Beobachtungen von Voyager 1 am Termination Shock. Von Decker *et al.* (2005).

und räumliche Störungen langsam bzw. groß sind im Vergleich zu den für das Plasma charakteristischen Größen wie Plasma- oder Zyklotronfrequenz und Debyeradius. Die Grundgleichungen der MHD sind im Anhang B hergeleitet. Sie bestehen aus je einer Kontinuitätsgleichung für die Massendichte ρ und die Ladungsdichte ξ , einer Bewegungsgleichung, dem Ohm'schen Gesetz, sowie den Maxwellgleichungen. In der Regel kann in ihnen der Verschiebungsstrom $\frac{1}{c^2}\dot{\vec{E}}$ vernachlässigt werden. Wir verbinden das Ampère'sche und das Ohm'sche Gesetz in dieser Näherung

$$\vec{J} = \frac{1}{\mu_0} \vec{\nabla} \times \vec{B} = \sigma (\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}), \quad (5.12)$$

wo σ die elektrische Leitfähigkeit des Plasmas ist

$$\sigma \doteq \frac{ne^2}{m_e} \tau_c, \quad (5.13)$$

wo τ_c die mittlere Kollisionszeit im Plasma ist. Wir bestimmen die Rotation von Glg. 5.12 und setzen aus dem Faraday'schen Gesetz

$$\dot{\vec{B}} = -\vec{\nabla} \times \vec{E} \quad (5.14)$$

ein,

$$\dot{\vec{B}} = \vec{\nabla} \times \vec{u} \times \vec{B} + \frac{1}{\mu_0 \sigma} \Delta \vec{B}, \quad (5.15)$$

wobei wir $\nabla \times \nabla \times B = \nabla(\nabla \cdot B) - \Delta B = -\Delta B$ verwendet haben ("rot rot gleich grad div - Laplace"). Gleichung 5.15 ist die Induktionsgleichung der MHD. Ein Verständnis ihrer Struktur hilft uns, das Verhalten des interplanetaren Plasmas zu verstehen. Je nach Leitfähigkeit des Plasmas dominiert der eine oder der andere Term auf der rechten Seite. Für sehr schlechte (kleine) Leitfähigkeit oder bei sehr langsamen Bewegungen im Plasma, wird die Induktionsgleichung zu einer Diffusionsgleichung

$$\dot{\vec{B}} = \frac{1}{\mu_0 \sigma} \Delta \vec{B}, \quad (5.16)$$

weil dieser Term den Bewegungsterm in diesem Falle dominiert. Die Größe $\eta = 1/\mu_0 \sigma$ heißt magnetische Diffusivität oder Resistivität. Wir können aus Glg. 5.16 eine Diffusionszeit abschätzen,

$$\left[\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right] = \left[\frac{1}{\mu_0 \sigma} \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial r^2} \right] \implies \tau_{\text{diff}} = \mu_0 \sigma L^2 = \frac{L^2}{\eta}, \quad (5.17)$$

wo L eine typische Längenskala ist.

Übung 5.2 Schätzen Sie die Leitfähigkeit der Korona ab. Hinweis: Streuquerschnitt σ_c via $e^2/r_c = m_e v^2$ abschätzen und für v eine sinnvolle Größe verwenden.

Übung 5.3 Bestimmen Sie die Stabilität von Sonnenflecken gegen Diffusion. $L \sim 10^7 m$, $T \sim 10^4 K$ sind typische Werte für Sonnenflecken.

Im Falle, dass die Leitfähigkeit sehr groß ist, oder die Bewegungen sehr schnell sind, kann der diffusive Term vernachlässigt werden.

$$\dot{\vec{B}} = \vec{\nabla} \times \vec{u} \times \vec{B}. \quad (5.18)$$

Wie wir im Folgenden herleiten, bedeutet diese Gleichung, dass der magnetische Fluss durch eine im Plasma mitgeführte geschlossene Kurve konstant bleibt. In Abb. 5.7 ist die zu untersuchende Situation schematisch skizziert.

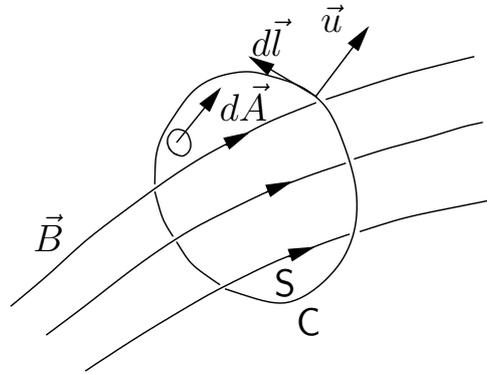


Abbildung 5.7: Magnetischer Fluss durch die durch eine geschlossene Kurve C aufgespannte Fläche S .

Der durch die Fläche S durchtretende magnetische Fluss kann sich auf zwei Arten ändern, einerseits kann sich das in einer festen Kurve C eingeschlossene Feld \vec{B} ändern, oder die Kurve C bewegt sich relativ zum Feld \vec{B} . In der ersten Möglichkeit ist die Änderung des Flusses in einem kleinen Flächenelement $d\vec{A}$ gegeben durch

$$\dot{\vec{B}} \cdot d\vec{A} \quad (5.19)$$

und die totale Änderung ergibt sich durch Integration über die gesamte Fläche S . In der zweiten Möglichkeit bewegt sich ein infinitesimales Element der Kurve $d\vec{l}$ relativ zu \vec{B} . Die Änderung des eingeschlossenen Feldes ist dann

$$\vec{B} \cdot (\vec{u} \times d\vec{l}) \quad (5.20)$$

und die totale Änderung ergibt sich durch Konturintegration entlang C . Wir verwenden die Vektoridentität $A \cdot (B \times C) = (A \times B) \cdot C$ um Glg. 5.20 umzuformen und schreiben die gesamte Änderung des Flusses durch die durch eine Kurve C aufgespannte Fläche S

$$\frac{d}{dt} \int_S d\vec{A} \cdot \vec{B} = \int_S d\vec{A} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} - \oint_C d\vec{l} \cdot (\vec{u} \times \vec{B}). \quad (5.21)$$

Das Konturintegral formen wir mit Hilfe des Gesetzes von Stokes in ein Flächenintegral um

$$\oint_C d\vec{l} \cdot (\vec{u} \times \vec{B}) = \int_S d\vec{A} \vec{\nabla} \times (\vec{u} \times \vec{B}). \quad (5.22)$$

Im Integranden steht nun genau die rechte Seite der Induktionsgleichung für den Fall unendlich guter Leitfähigkeit des Plasmas, was heißt, dass

$$\frac{d}{dt} \int_S d\vec{A} \cdot \vec{B} = \int_S d\vec{A} \cdot \left(\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} - \vec{\nabla} \times (\vec{u} \times \vec{B}) \right) = 0, \quad (5.23)$$

womit die eingangs aufgestellte Behauptung, dass sich der Fluss durch die Kurve C nicht verändert, bewiesen ist. Physikalisch bedeutet dies, dass sich das Magnetfeld mit dem Plasma bewegt, was salopp oft ausgedrückt wird als die Approximation der “eingefrorenen” Feldlinien. Für $\sigma \rightarrow \infty$ ist also das Magnetfeld im Plasma eingefroren, und es fließt passiv mit. Diese Näherung heißt auch “ideale” MHD. Der Übergang zwischen einem diffusiven und einem eingefrorenen Magnetfeld lässt sich parametrisieren durch das Verhältnis der Diffusionszeit τ_d zur Konvektionszeit τ_u . Wir haben

$$\tau_d = \mu_0 \sigma L^2, \quad \tau_u = \frac{L}{u} \quad (5.24)$$

und definieren damit die magnetische Reynoldszahl R_M

$$R_M \doteq \frac{\tau_d}{\tau_u} = \frac{\mu_0 \sigma L^2 u}{L} = \mu_0 \sigma L u. \quad (5.25)$$

Ist R_M groß, so gilt die Näherung der eingefrorenen Feldlinien, ist R_M klein, so diffundiert das Magnetfeld. Im interplanetaren Medium, wie in der Chromosphäre und Korona ist R_M groß.

Übung 5.4 Schätzen Sie R_M für Chromosphäre, Korona und IPM ab und vervollständigen Sie Tabelle 5.1.

	T	u	L	R_M
Chromosphäre	10^4 K	10 km/s	10^4 km	
Korona	10^6 K	500 km/s	10^4 km	
IPM	10^5 K	500 km/s	10^7 km	

Tabelle 5.1: Typische Größen für Chromosphäre, Korona und IPM.

Wir sind nun in der Lage, das Verhalten des Magnetfeldes im interplanetaren Medium zu bestimmen. Weil die Feldlinien hier in guter Näherung eingefroren sind, muss es sich wie eine archimedische Spirale um die Sonne wickeln. Das Sonnenwindplasma trägt das Magnetfeld mit sich radial von der

Sonne weg. Weil sich die Sonne um sich selber dreht, tritt der ‘‘Rasensprengereffekt’’ auf. In einem mit der Sonne rotierenden Bezugssystem lauten die Geschwindigkeitskomponenten des Sonnenwindes in Kugelkoordinaten

$$u_r = u, \quad (5.26)$$

$$u_\phi = -r\omega \sin \theta, \quad (5.27)$$

$$u_\theta = 0, \quad (5.28)$$

wo $\omega = 2.7 \times 10^{-6}$ Radian pro Sekunde die Winkelgeschwindigkeit der Sonnenrotation und θ vom Nordpol her gemessen ist. u_ϕ ist ausschließlich darauf zurückzuführen, dass wir uns in ein mitrotierendes System versetzt haben. In einem ortsfesten System fließt der Sonnenwind radial von der Sonne weg. Im mitrotierenden System erhält der Sonnenwind eine nicht-radiale Geschwindigkeitskomponente u_ϕ . Der Winkel zwischen einer eingefrorenen und mitbewegten Magnetfeld und der Radialen beträgt nach der Skizze in Abb. 5.8

$$\cos^2(\Phi) = \frac{1}{1 + \left(\frac{\omega r \sin \theta}{u}\right)^2}. \quad (5.29)$$

u_ϕ kann auch geschrieben werden als $r d\phi/dt$ und damit lässt sich eine Diffe-

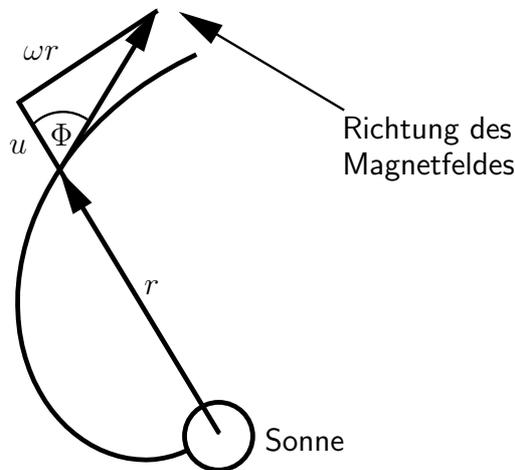


Abbildung 5.8: Die Orientierung des interplanetaren Magnetfeldes in der Ekliptik.

rentialgleichung für die Bewegung des Magnetfeldes aufstellen

$$\frac{u_r}{u_\phi} = \frac{1}{r} \frac{dr}{d\phi} = \frac{u}{-\omega r \sin \theta}, \quad \theta = \text{const.} \quad (5.30)$$

Für große Abstände von der Sonne $r \gg r_c$ ist die Geschwindigkeit des Sonnenwindes nahezu konstant und wir können dort in guter Näherung $u(r) = u$

konstant setzen. Damit wird Glg. 5.30 leicht integrierbar und ergibt die explizite Form der Feldlinien

$$r - r_0 = \frac{-u}{\omega \sin \theta} (\phi - \phi_0), \quad (5.31)$$

wo ϕ_0 die Anfangsposition bei r_0 ist. Die entstehende Magnetfeldkonfiguration im interplanetaren Medium ist in Abb. 5.9 wiedergegeben. Diese Archimedische Spirale heißt auch Parkerspirale. Bei einer kleinen Geschwindigkeit

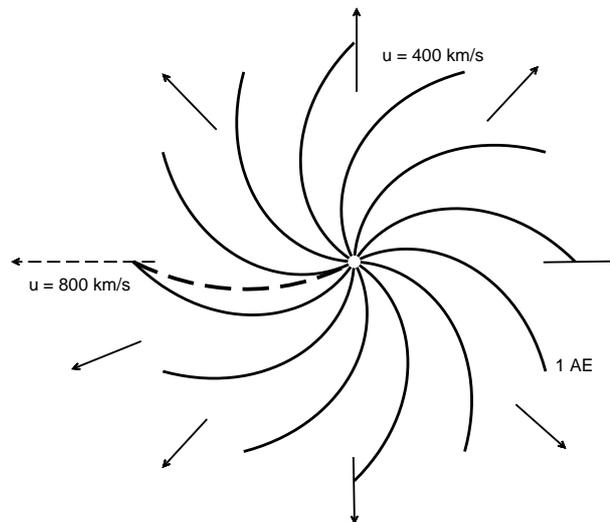


Abbildung 5.9: Spiralkonfiguration des interplanetaren Magnetfeldes.

werden die Feldlinien stärker aufgewickelt, wie ein Vergleich der gestrichelten mit den durchgezogenen Linien zeigt. Weil die Feldlinien mit dem Plasma mitfließen, erfährt dieses auch keine Lorentzkraft. Die einzelnen Teilchen im Plasma fühlen nur Kräfte, welche auf ihre thermische Bewegung im Plasma zurückzuführen sind. Teilchenpopulationen, welche sich relativ zum Sonnenwind bewegen, spüren aber das an ihnen vorbeikonvektierte Magnetfeld. Dies ist für Transportprozesse in der Heliosphäre von grundlegender Bedeutung.

Übung 5.5 Bestimmen Sie die Länge s einer Parkerspirale für beliebige Sonnenwindgeschwindigkeiten u und Abstände R .

Lösung:

$$s(r) = \frac{u}{2\Omega \sin \theta} \left(\phi(r) \sqrt{\phi(r)^2 + 1} + \ln \left(\phi(r) + \sqrt{\phi(r)^2 + 1} \right) \right) \Big|_{\Phi_{r_0}}^{\Phi} (R), \quad (5.32)$$

wo $\phi(r)$ aus Glg. ?? folgt.

Wir können nun die einzelnen Komponenten des Magnetfeldes berechnen. In Kugelkoordinaten geschrieben lautet die Quellenfreiheit des Magnetfeldes

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 B_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta B_\theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} B_\phi = 0. \quad (5.33)$$

In der Approximation der eingefrorenen Feldlinien ist nach Abb. 5.8

$$\frac{B_\phi}{B_r} = \frac{u_\phi}{u_r} = -\frac{\omega r \sin \theta}{u}. \quad (5.34)$$

Damit kann B_ϕ durch B_r ausgedrückt werden und wegen der Axialsymmetrie muss ferner auch

$$\frac{\partial B_r}{\partial \phi} = 0 \quad (5.35)$$

gelten. B_θ ist wegen $u_\theta = 0$ gleich Null. Damit vereinfacht sich Glg. 5.33 zu

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 B_r) = 0 \quad (5.36)$$

und folglich muss $B_r \sim 1/r^2$ sein. Wir führen die Referenzgröße $B_0 \doteq B_r(r_0, \phi_0)$ ein. Damit lauten die Komponenten des interplanetaren Magnetfeldes

$$B_r = -B_0 \left(\frac{r_0}{r} \right)^2, \quad (5.37)$$

$$B_\theta = 0, \quad (5.38)$$

$$B_\phi = -B_0 \frac{\omega r_0^2 \sin \theta}{u r}. \quad (5.39)$$

Wie aus Glg. 5.37 und 5.39 ersichtlich, muss die radiale Abhängigkeit des gesamten Betrags des Magnetfeldes nicht wie $1/r^2$ abnehmen, sondern muss noch einen Term $1/r$ enthalten. Dieser Beitrag stammt von der immer mehr zunehmenden Aufwicklung des Magnetfeldes. Das Verhalten von $|B(r)|$ ist in Abb. 5.10 dargestellt. Dieses Verhalten spielt für die Ausbreitung von Plasmawellen im interplanetaren Medium eine wesentliche Rolle, weil es bedeutet, dass die Schallgeschwindigkeit und die Alfvéngeschwindigkeit nicht dieselbe radiale Abhängigkeit haben.

Die Struktur des interplanetaren Magnetfeldes wird bestimmt durch die Ausbreitungseigenschaften des Sonnenwindes und durch die Anfangsbedingungen auf der Sonne. Während des Aktivitätsminimums der Sonne gleicht die magnetische Konfiguration der eines Dipols, allerdings verfälscht durch die Expansion des Sonnenwindes. Abbildung 5.11 zeigt eine mögliche Konfiguration. Ein großes koronales Loch bedeckt Nord und Südpol. Koronale Löcher sind Gebiete mit niedriger Elektronendichte, welche auf Weißlichtaufnahmen als dunkle (wenig belichtete) Gebiete erscheinen, weil die niedrige Elektronendichte weniger photosphärisches Licht streut als dichtere Gebiete. Koronale Löcher sind Gebiete mit unipolarem Magnetfeld, welches durch die Expansion des Sonnenwindes geöffnet ist, d.h. die Feldlinien sind nicht mehr mit beiden Enden mit der Sonnenoberfläche verbunden, sondern eines irgendwo mit dem interstellaren Medium. Natürlich muss nach Maxwell $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$ sein, dies bedeutet lediglich, dass gleich viel positiver, wie negativer Fluss die Quellfläche verlassen muss. Als Quellfläche (source surface) wird im Allgemeinen eine Fläche bei $2.5 r_\odot$ verwendet, welche das Resultat von physikalischen Extrapolationsmodellen des photosphärischen Magnetfeldes sind. Während des

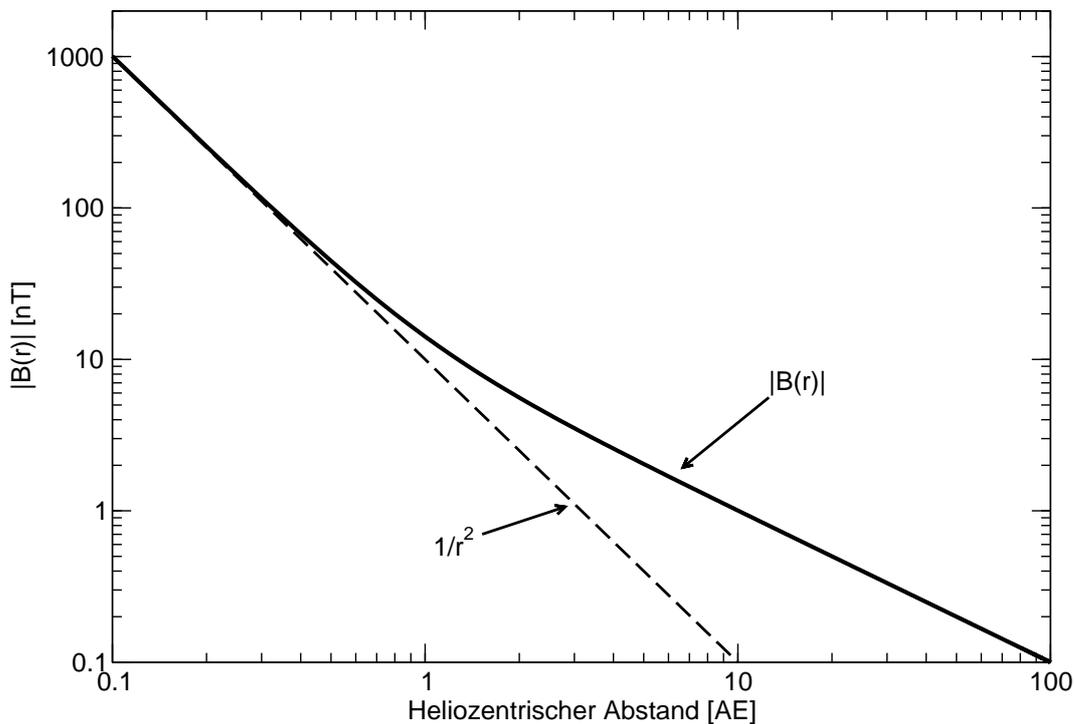


Abbildung 5.10: Radiale Abhängigkeit des Gesamtbetrages des interplanetaren Magnetfeldes.

Sonnenaktivitätsminimums erscheint das solare Magnetfeld global mit einer dominanten Dipolkomponente. Dessen Symmetrieachse ist um ca. 7 Grad gegenüber der Rotationsachse der Sonne geneigt¹. Diese Neigung führt zusammen mit der Rotation der Sonne und der Expansion des Sonnenwindes zu einer Ausbildung einer Sektorstruktur des interplanetaren Magnetfeldes. In der Ekliptik erscheint die Polarität des IMF abwechslungsweise positiv und negativ. Ein Wechsel zwischen den beiden Polaritäten erfolgt in der in Abb. 5.11 skizzierten Konfiguration einmal pro Umdrehung der Sonne. Die Region zwischen den gut ausgebildeten unipolaren koronalen Löchern besteht hauptsächlich aus geschlossenen Feldlinien. Hier ist die Expansionsgeschwindigkeit des Sonnenwindes zu klein, um die Feldlinien über den kritischen (Alfvén-)radius hinaus zu ziehen. Aus diesen Gebieten entweicht kein Sonnenwind, weil die kritische Geschwindigkeit kleiner ist als die Entweichgeschwindigkeit der Sonne, was zu einer hohen Dichte (bis zu 100 Mal dichter als in koronalen Löchern) führt. Der Sonnenwind strömt hier entlang der Grenzen zwischen den offenen und geschlossenen Feldlinien ins interplanetare Medium. Stark vereinfacht betrachtet muss deshalb die Heliosphäre im solaren Aktivitätsminimum großräumig in zwei unipolare Hälften geteilt sein, welche durch eine Stromschicht, der

¹Es ist nicht unmöglich, dass diese Neigung (also ein Symmetriebruch) für die Existenz des solaren Magnetfeldes notwendig ist. Nach dem sog. Satz von Cowling existiert kein axialsymmetrischer Dynamo, welcher das solare Magnetfeld treiben könnte.

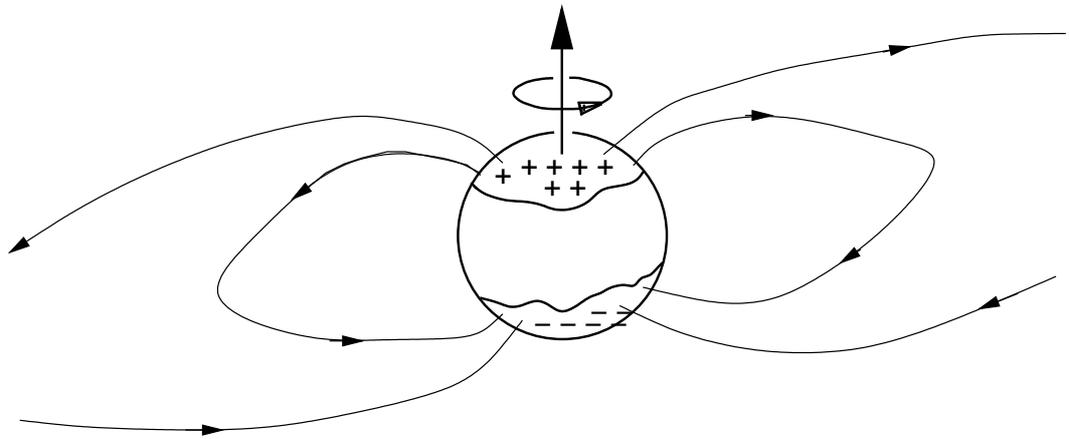


Abbildung 5.11: Struktur des solaren Magnetfeldes während des solaren Aktivitätsminimums.

heliosphärischen Stromschicht (heliospheric current sheet) getrennt sind. Die

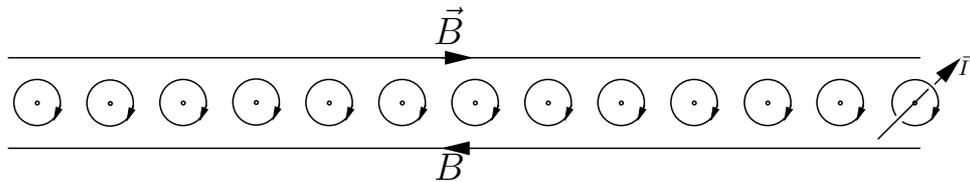


Abbildung 5.12: Die heliosphärische Stromschicht trennt Gebiete verschiedener magnetischer Polarität.

heliosphärische Stromschicht zeichnet sich durch mehrere ungewöhnliche Eigenschaften aus, welche erstmals von *Borrini et al.* (1981) und *Gosling et al.* (1981) beschrieben worden sind:

- erhöhte Dichte,
- besonders langsamen und kalten Sonnenwind,
- Verschwinden der differentiellen Strömung zwischen Protonen und Alphateilchen,
- Angleichung der kinetischen Temperaturen von Protonen und Alphateilchen,
- Abnahme der Heliumhäufigkeit,
- besonders heißes koronales Plasma (hohe Einfriertemperaturen),
- etc.

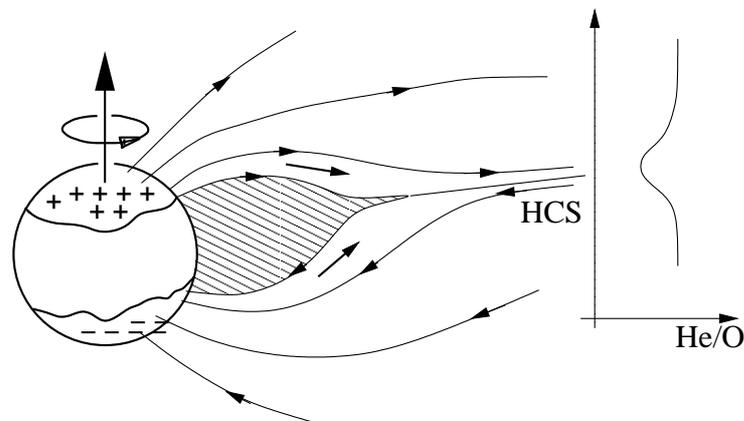


Abbildung 5.13: Schematische Ansicht eines Streamers. Das schraffierte Gebiet markiert Regionen mit stark erhöhter Elektronendichte. Weg der geschlossenen Magnetfeldkonfiguration entweicht daraus kein Plasma und das koronale Plasma ist gravitativ geschichtet. Der langsame Sonnenwind stammt aus den benachbarten Gebieten (dicke Pfeile) in denen große Expansionsfaktoren zu niedrigem Protonenfluss und deshalb zu ineffizienter Coulomb-Reibung führen.

Die erhöhte Dichte, das Verschwinden der sonst beobachteten differentiellen Strömung zwischen Protonen und α -Teilchen und die Angleichung ihrer Temperaturen sind alle miteinander verbunden, die erhöhte Dichte resultiert in einer erhöhten Stoßfrequenz und folglich ist das Plasma näher dem thermodynamischen Gleichgewicht, in welchem alle Temperaturen und Geschwindigkeiten gleich sind. Die Abnahme der Heliumhäufigkeit kann erklärt werden durch gravitative Schichtung der Streamer² oder durch einen ungenügend hohen Sonnenwindfluss, der die Heliumkerne nicht mehr aus der Korona herauszuziehen vermag. In detaillierten Modellen des Ursprungs des langsamen Sonnenwindes spielt die Reibung zwischen Protonen und schwereren Ionen während der Beschleunigung eine nicht unwesentliche Rolle. Durch Stöße mit Protonen können schwerere Ionen einen Impulsgewinn erhalten, der mithilft, sie aus der Korona zu beschleunigen. In gewissen Situationen ist diese Reibungskraft nicht besonders effizient, die Kopplung der Geschwindigkeiten der schweren Ionen und Protonen ist dann nicht mehr gewährleistet. Dies scheint in großen polaren koronalen Löchern, wie auch in Streamern der Fall zu sein. Messungen von schweren Ionen (hier schwerer als Helium) können dies erhärten. Weil diese alle einen größeren Streuquerschnitt mit Protonen haben, als α -Teilchen, sind sie besser ans Protonengas gekoppelt und tendieren eher dazu, dieselbe Geschwindigkeit aufzuweisen. Weil sie aber wesentlich schwerer sind, als α -Teilchen, wirkt die Gravitation um so stärker auf sie. Damit braucht lediglich z.B. das Verhältnis He/O bestimmt zu werden, um herauszufinden, ob der Sonnenwind in der

²Dies ist der englische Ausdruck für die hellen Gebiete in Koronagraphenaufnahmen der Korona. Diese Gebiete zeichnen sich durch erhöhte Elektronendichte aus, daher der erhöhte Kontrast.

Nähe von Sektorgrenzen, also aus Streamern stammend, aufgrund der Gravitation oder von ungenügendem Protonenfluss eine geringe Heliumhäufigkeit aufweist. Beobachtungen zeigen, dass He/O an Sektorgrenzen abnimmt, was darauf hindeutet, dass die Heliumhäufigkeit alleine abgereichert ist und also die Ursprungsregion des langsamen Sonnenwindes nicht gravitativ geschichtet ist. Weil Streamer in der Regel im hydrostatischen Gleichgewicht zu stehen scheinen, und in diesem eine gravitative Schichtung zu erwarten ist, impliziert die wenig veränderte Sauerstoffhäufigkeit, dass der Sonnenwind entlang der Ränder von Streamern entspringt. Die gravitative Schichtung von Streamern ist durch UVCS Messungen bestätigt worden.

In der einfachsten Konfiguration des IMF trennt die heliosphärische Stromschicht zwei Hemisphären unterschiedlicher Polarität und damit wird durch Raumsonden in der Ekliptik eine zwei-Sektor-Struktur gemessen. Ist die Grenze der polaren koronalen Löcher komplizierter strukturiert, führt dies zu einer komplizierteren Struktur des IMF. In der Regel werden vier oder mehr magnetische Sektoren pro Umdrehung der Sonne gemessen. Abbildung 5.14 zeigt ein solches Beispiel.

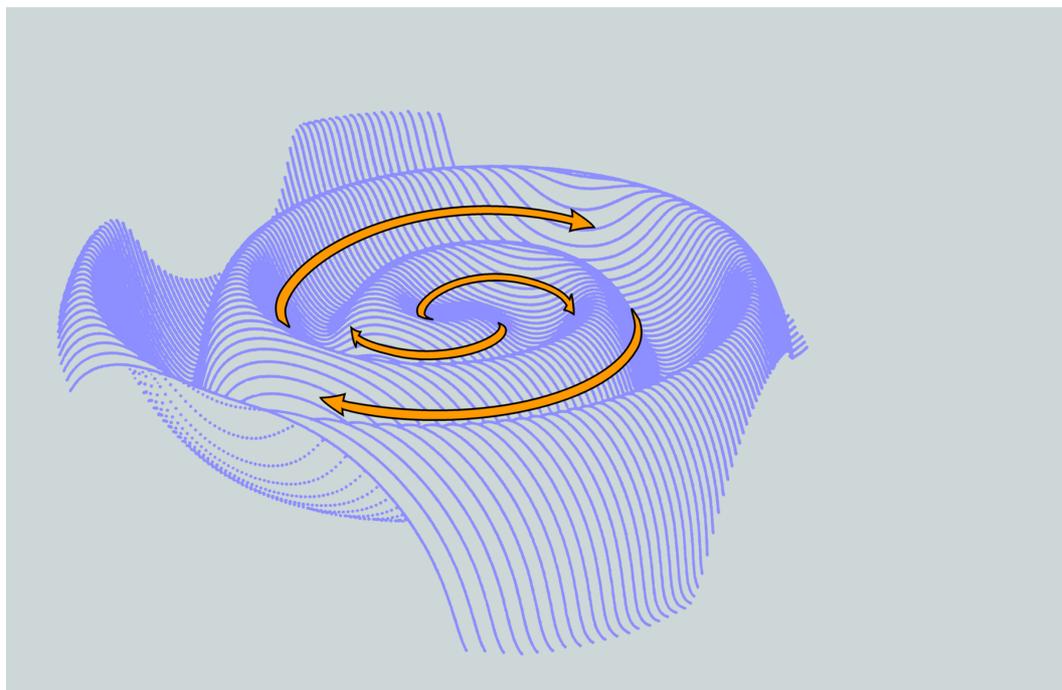


Abbildung 5.14: Ballerina Modell der heliosphärischen Stromschicht.

5.2.2 Schneller und langsamer Sonnenwind

Fehlt z. Zt. noch.

5.2.3 Die dritte Dimension, Ulysses-Resultate

Wir betrachten zunächst die Konfiguration der Korona und damit der Heliosphäre während des solaren Aktivitätsminimums. In dieser Phase ist die Struktur der Heliosphäre besonders einfach. Die hier besprochene Struktur ist durch die ESA/NASA Sonde Ulysses experimentell bestätigt worden. Darüber hinaus hat Ulysses Messungen geliefert, welche das einfache Parkermodell der heliosphärischen Magnetfeldkonfiguration (siehe Abschnitt 5.2.1) in Frage stellen.

5.2.4 Corotating Interaction Regions

Wir haben den einfachsten Fall der heliosphärischen Magnetfeldkonfiguration bereits andeutungsweise besprochen. Die Beobachtung, dass koronale Löcher die Quelle des schnellen Sonnenwindes sind (*Krieger et al., 1973*), impliziert eine wesentlich kompliziertere Struktur bereits während des topologisch einfachen und überschaubaren Sonnenaktivitätsminimums. Abb. 5.15 zeigt, wie sich die Sonnenwindgeschwindigkeit mit der Größe des koronalen Loches ändert. Während des Aktivitätsminimums der Sonne konzentrieren sich große koronale Löcher an den Polen der Sonne, während der streamer belt entlang des heliomagnetischen Äquators konzentriert bleibt. Dieser wird allgemein als die Quelle des langsamen Sonnenwindes angesehen, selbst wenn dessen Ursprung nach wie vor nicht geklärt ist. Mehrere Signaturen in der Zusammensetzung, der Temperatur, wie auch anderer kinetischer Eigenschaften des langsamen Windes werden am besten durch einen Ursprung im streamer belt erklärt (*Borrini et al., 1981; Gosling et al., 1981*).

Die Konzentration des langsamen Sonnenwindes um den “streamer belt” und des schnellen Sonnenwindes um die Pole führt dazu, dass eine Messung der Sonnenwindgeschwindigkeit an einem festgehaltenen Ort verschieden ausfallen kann. Liegt der Ort in heliomagnetischer Breite innerhalb des streamer belt, so wird nur langsamer Sonnenwind, allerdings mit wechselnder Polarität des Magnetfeldes, gemessen. Liegt der Ort in heliomagnetischer Breite leicht darüber oder darunter, so muss abwechselnd schneller und langsamer Sonnenwind gemessen werden. Liegt der Ort noch weiter nördlich oder südlich, so wird ausschließlich schneller Sonnenwind gemessen. Dieses Verhalten ist durch Messungen von Instrumenten auf der Sonde Ulysses eindrucksvoll bestätigt worden (*Bame et al., 1993*). So ist nicht nur ein “Band der Variabilität” (*Gosling et al., 1997*) in der Sonnenwindgeschwindigkeit gemessen worden, sondern auch durch Messung der Einfriertemperaturen ein eindeutig anderer koronaler Ursprung festgestellt worden.

Im Aktivitätsminimum der Sonne darf das “Band der Variabilität” nach dem besprochenen Modell der Ausbreitung des Sonnenwindes nicht breiter sein, als die totale Breite des streamer belts plus dessen Neigung gegenüber der Ekliptik. Auch diese Voraussage hat sich mit Ulysses bestätigt. Was aber geschieht in den Gebieten, in denen der schnelle Wind auf den langsamen trifft

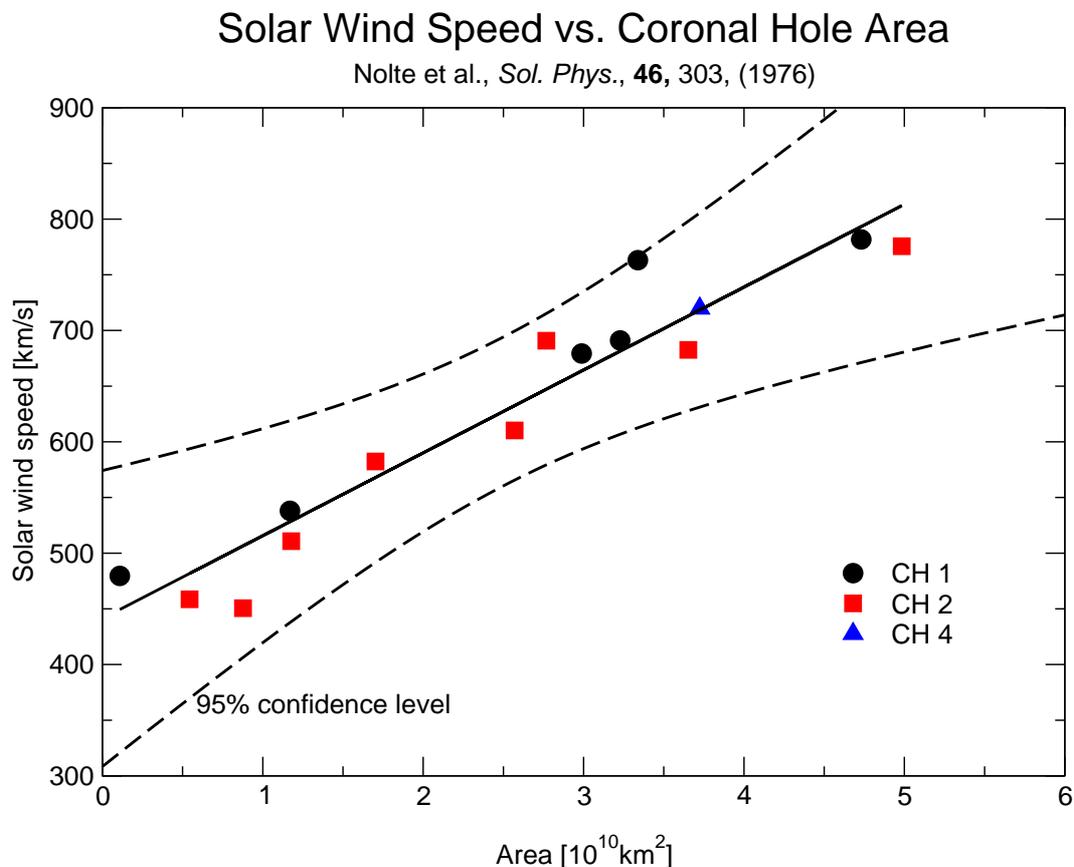


Abbildung 5.15: Geschwindigkeit im schnellen Sonnenwind als Funktion der Fläche des koronalen Loches, aus dem der Wind entstammt. Nach *Nolte et al.* (1976).

und dort mit ihm zu wechselwirken beginnen muss?

Die großen polaren koronalen Löcher emittieren Sonnenwind mit einer sehr hohen Geschwindigkeit; die Ulysses-Sonde hat über den Polen der Sonne in der Tat sehr hohe Geschwindigkeiten mit einem Mittelwert um 750 km/s gemessen. Während des Aktivitätsminimums der Sonne, befinden sich die größten koronalen Löcher über den Polen der Sonne. Weil der schnellste Sonnenwind also über den Polen entfliehen muss, der langsame Sonnenwind aber aus den dichteren Regionen um den magnetischen Äquator (dem sog. "streamer belt") stammt und die heliosphärische Stromschicht wie auch der magnetische Äquator gegenüber dem heliographischen Äquator geneigt ist, muss es Regionen geben, in denen der schnelle Wind in den langsamen Wind hineinläuft. Diese Situation ist in Abb. 5.16 abgebildet. Die grau schattierten Regionen sind Gebiete, in denen der schnelle Sonnenwind den langsamen einholt und mit ihm zu wechselwirken beginnt. Weil sich diese Struktur mit der Sonne mitdrehen muss, heißen sie im Fachjargon "corotating interaction regions" (CIRs), korotierende Wechselwirkungsregionen. Es ist offensichtlich, dass in Gebieten, in denen der

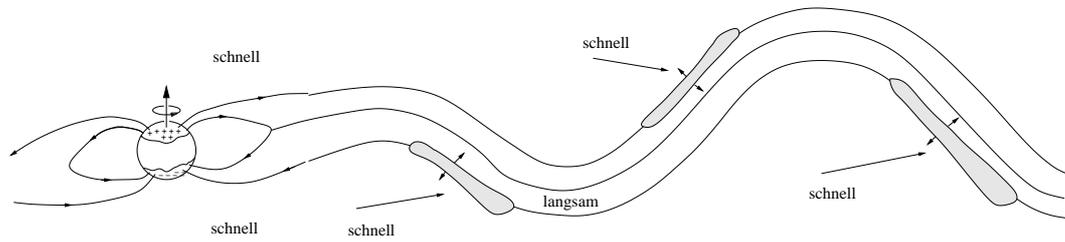


Abbildung 5.16: Ausbildung von korotierenden Wechselwirkungsregionen (CIRs).

schnelle und der langsame Sonnenwind aufeinander treffen, das interplanetare Medium komprimiert wird und damit notwendigerweise eine Erhöhung des Drucks und der Temperatur erfolgt. Weil der Wärmetransport nur unbedeutend ist, muss die Änderung adiabatisch erfolgen. Die entstehende Druckwelle breitet sich nach beiden Richtungen aus, rückwärts in den schnellen und vorwärts in den langsamen Sonnenwind. Wir werden in Abschnitt 5.4 besprechen, wie sich unter solchen Umständen Stoßwellen bilden und wie in diesen Regionen Teilchen zu hohen Energien beschleunigt werden können. In der Tat haben sich die Flüsse energiereicher Teilchen bei CIRs als erhöht erwiesen, was zunächst nicht besonders erstaunlich war. Die erhöhten Flüsse energiereicher Teilchen haben sich in den für diese Untersuchungen interessanten Zeitperioden der Ulyssesmission wie ein Uhrwerk wiederholt. Interessanterweise zeigen sich aber die Erhöhungen der Flüsse energiereicher Teilchen selbst dann wie ein korotierendes System, wenn nach dem einfachen Parkermodell der Magnetfeldkonfiguration der Heliosphäre gar keine magnetische Verbindung mit CIRs möglich sein sollte! Dieser Sachverhalt ist in Abb. 5.17 dargestellt. Dies impliziert, dass mit dem Parkermodell etwas nicht stimmen kann. Verschiedenen Lösungen sind vorgeschlagen worden, eine definitive Antwort steht noch aus. Lösungsansätze müssen alle versuchen, Gebiete hoher heliographischer Breite mit Gebieten niedriger Breite zu verbinden. Dies geschieht entweder durch ein stochastisches Verdrehen der Fußpunkte der Feldlinien, oder aber durch einen systematischen Transport der Fußpunkte zwischen den beiden Breitenbereichen. Beide Ideen können die Beobachtungen energiereicher Teilchen bei den "falschen" Breiten erklären, nur die systematische Änderung ist aber eine Konsequenz der rigiden Korotation koronaler Löcher. Sie benutzt die Beobachtung, dass zwar die Photosphäre differentiell rotiert, also in höheren Breiten langsamer rotiert, als entlang des Äquators, koronale Löcher aber in allen Breiten gleich schnell zu rotieren scheinen. Dies impliziert einen systematischen Transport von magnetischen Feldlinien zwischen niedrigen und hohen Breiten in der Region zwischen Photosphäre und Korona. Dieser systematische Transport pflanzt sich auch ins interplanetare Medium fort und verbindet so Regionen niedriger Breite mit Regionen hoher Breiten magnetisch und vermag so auf natürliche Art die Beobachtungen energiereicher Teilchen bei hohen Breiten zu erklären. Darüber hinaus hat diese Idee auch Konsequenzen für den bisher

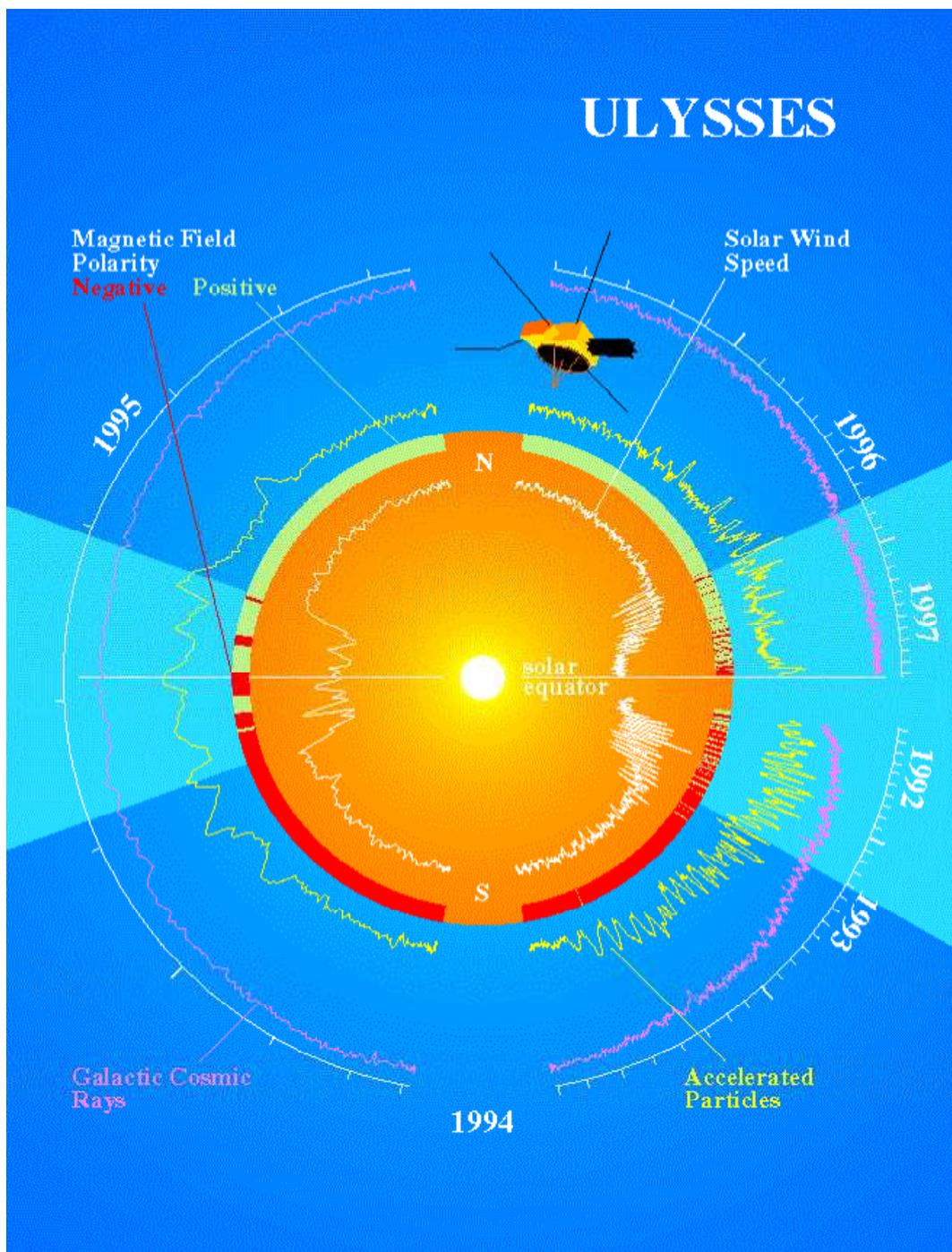


Abbildung 5.17: 3-dimensionale Struktur der Heliosphäre wie sie sich während des Aktivitätsminimums der Sonne präsentiert.

ungeklärten Ursprung des langsamen Sonnenwindes.

Es soll aber nicht verschwiegen werden, dass auch die Idee der stochastischen Bewegung der Fußpunkte ihre pointierten Befürworter hat und dass die beiden Ideen heute auf dem Markt aller Ideen die wohl besten sind. Die Zukunft wird uns lehren, welche der beiden die richtige ist (und dann den schon zu früh verwendeten Namen Theorie verdient). Persönlich glaube ich, dass die systematische Bewegung den Kern der Sache trifft, allerdings basiert diese Vorliebe auf dem Vorurteil, dass Wahrheiten auch eine gewisse "innere Schönheit" oder Eleganz aufweisen müssen. Dieses Vorurteil ist nicht im wissenschaftlichen Bereich der Wissenschaft anzusiedeln.

Die magnetische Konfiguration der Sonne ändert sich im Laufe ihres Aktivitätszyklus. Die einfache Dipolkonfiguration neigt sich immer stärker und das Quadrupolmoment scheint immer stärker zu werden. Zu einem gewissen Zeitpunkt ist dann das Magnetfeld umgeklappt, und es stellt sich eine Dipolkonfiguration mit umgekehrtem Vorzeichen ein. Diese dreht sich unter Zunahme des Quadrupolmomentes wieder weiter, bis wieder die ursprüngliche Konfiguration erreicht ist. Damit ist ein sogenannter Sonnenaktivitätszyklus durchlaufen. In dieser Zeit hat die Anzahl Sonnenflecken auf der Sonne zweimal ein Maximum und ein Minimum erreicht, was gelegentlich zu Verwirrungen über den Namen Sonnenzyklus führt. Der magnetische Zyklus dauert ca. 22 Jahre und beinhaltet 2 Sonnenfleckenzyklen, welche je ca. 11 Jahre dauern. Der Sonnenfleckenzyklus wird oft auch als Aktivitätszyklus bezeichnet, weil die Sonne bei hohen Sonnenfleckenzahlen auch aktiver ist.

Das Kippen des Dipols hat natürlich auch seine Auswirkungen auf die Struktur der Heliosphäre, weil ja das Gebiet um den magnetischen Äquator den langsamen Sonnenwind ausstößt, die unipolaren koronalen Löcher aber den schnellen Sonnenwind. Die Neigung der heliosphärischen Stromschicht nimmt also gegen das Aktivitätsmaximum hin auch zu, genauso nimmt auch die Komplexität zu, weil diese viel mehr verbogen und verbeult ist. Abb. 5.18 zeigt in stark vereinfachter Weise die magnetische Konfiguration der Sonne über einen halben magnetischen Aktivitätszyklus, bzw. einen Sonnenfleckenzyklus. Die Wechselwirkung des schnellen und des langsamen Sonnenwindes unter-

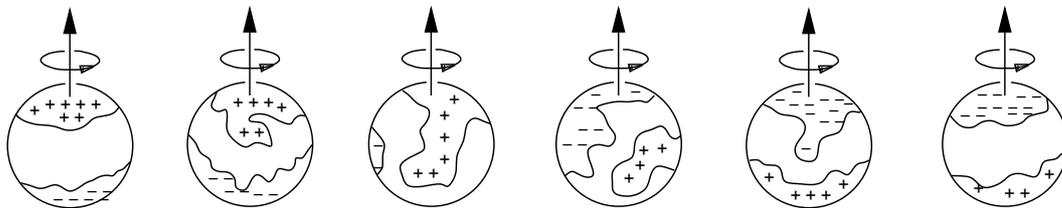


Abbildung 5.18: Struktur des solaren Magnetfeldes über einen halben magnetischen Zyklus.

scheidet sich deutlich in verschiedenen Stadien des Sonnenaktivitätszyklus, unter anderem wegen der verschobenen Quellregionen, der veränderten Neigung

der Stromschicht, aber auch der Abnahme der Fläche der koronalen Löcher und der zunehmenden Bedeutung der Streamers. Gegen das Aktivitätsmaximum hin erscheint die Heliosphäre großräumig nahezu strukturlos, sie wird in allen Breiten von langsamem Sonnenwind und vereinzelt schnellen Strömen aufgefüllt. Sporadisch auftretende koronale Massenauswürfe übernehmen die Rolle der korotierenden Wechselwirkungsregionen in der Strukturierung und in der Beschleunigung energiereicher Teilchen.

Die langsamen Variationen wirken sich auch auf andere Größen im Sonnensystem aus, deren Messung aber nicht unbedingt einfach ist. Die leicht erhöhte Magnetfeldstärke hat z. B. einen Einfluss auf die Alfvéngeschwindigkeit und damit auf die Ausbreitung von Wellen und Schocks in der Heliosphäre. Insbesondere die noch zu behandelnde galaktische kosmische Strahlung wird auf ganz andere Art und Weise moduliert, je nach Aktivitätsstadium. Die Aktivität der Sonne äußert sich auch in einer wesentlich erhöhten Rate von koronalen Massenauswürfen (coronal mass ejections, CMEs), welche hier nicht im Detail behandelt werden.

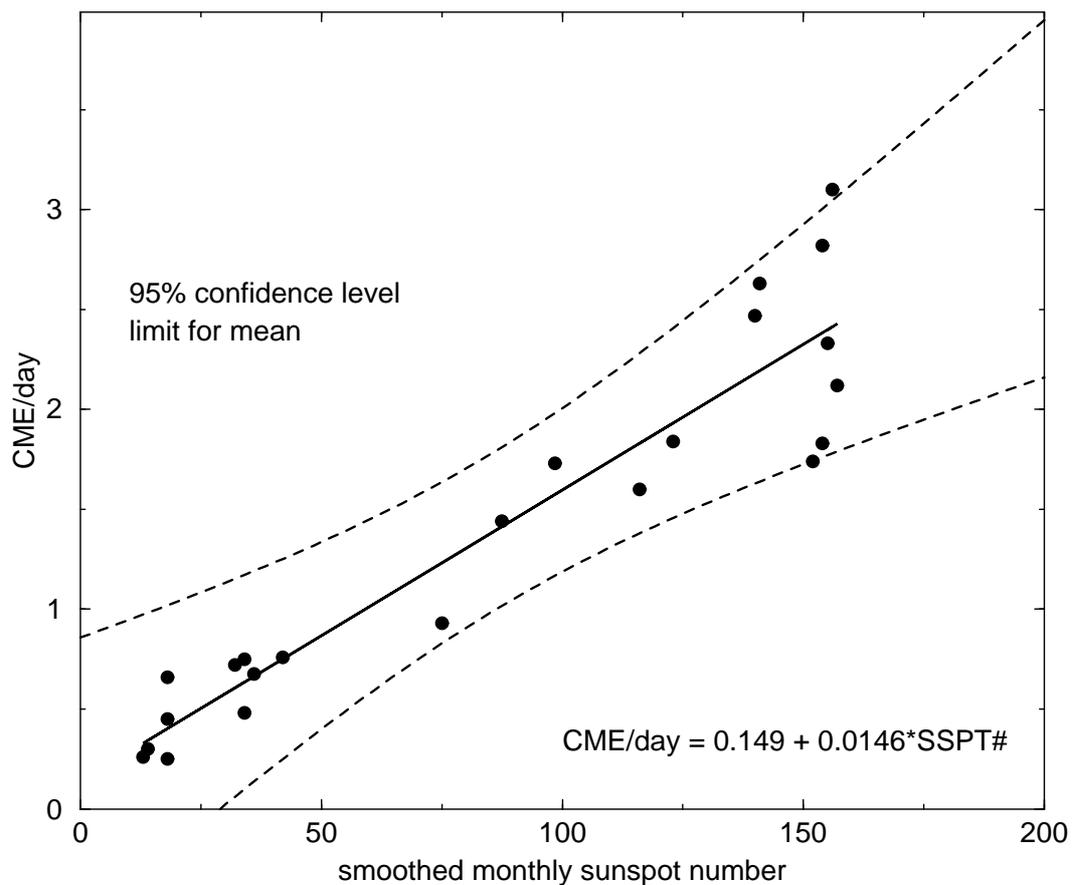


Abbildung 5.19: Häufigkeit von koronalen Massenauswürfen auf der Sonne in Funktion der Sonnenfleckenanzahl.

5.3 Wechselwirkung des Sonnenwindes mit Hindernissen

5.3.1 Stoßfreie Plasmen?

Wir werden in den folgenden Kapiteln die Physik von stoßfreien Plasmen behandeln. Definitionsgemäß handelt es sich bei einem Plasma um eine Ansammlung von elektrisch geladenen Teilchen, die über die elektromagnetischen Kräfte miteinander wechselwirken. So stellt sich nun die Frage, was denn “stoßfrei” bedeutet, wenn die Teilchen doch miteinander wechselwirken. Dazu nimmt man die Boltzmann-Gleichung zu Rat, die wir hier heuristisch ‘herleiten’.

Wir betrachten dazu eine Verteilung von Teilchen, $f(\vec{x}, \vec{p}, t)$ am Ort \vec{x} mit Impuls \vec{p} zur Zeit t . Wenn die Teilchen untereinander nicht stoßen, so werden sie nach einer Zeit dt einen veränderten Ort und Impuls haben,

$$f(\vec{x}, \vec{p}, t) \longrightarrow f(\vec{x} + d\vec{x}, \vec{p} + d\vec{p}, t + dt).$$

Unterliegen sie einer externen Kraft $\vec{F} = d\vec{p}/dt$, so gilt

$$f(\vec{x}, \vec{p}, t) \longrightarrow f\left(\vec{x} + \frac{\vec{p}}{m}dt, \vec{p} + \vec{F}dt, t + dt\right).$$

Nach dem Satz von Liouville kann der Pfeil durch ein Gleichheitszeichen ersetzt werden, denn die Phasenraumdichte ist inkompressibel³, also

$$f\left(\vec{x} + \frac{\vec{p}}{m}dt, \vec{p} + \vec{F}dt, t + dt\right)d\vec{x}d\vec{p} = f(\vec{x}, \vec{p}, t)d\vec{x}d\vec{p}.$$

Stöße können nun die Verteilungsfunktion verändern und wir ‘schieben ihnen dafür auch immer die Schuld zu’.

$$f\left(\vec{x} + \frac{\vec{p}}{m}dt, \vec{p} + \vec{F}dt, t + dt\right)d\vec{x}d\vec{p} - f(\vec{x}, \vec{p}, t)d\vec{x}d\vec{p} = \frac{\partial f}{\partial t}d\vec{x}d\vec{p}dt.$$

Wir dividieren nun durch $d\vec{x} d\vec{p} dt$ und nehmen den Grenzwert, in dem diese Größen infinitesimal klein werden und erhalten die Boltzmann-Gleichung

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \vec{v} \frac{\partial f}{\partial \vec{x}} + \dot{\vec{p}} \frac{\partial f}{\partial \vec{p}} = C(f), \quad (5.40)$$

wo $C(f) = |\partial f / \partial t|_{\text{coll}}$ das Stoßintegral ist, welches die Stöße beschreibt. Im nicht-relativistischen Fall ist $\vec{p}/m = \vec{v}$, ferner gilt $\vec{F} = \dot{\vec{p}}$. Für ein Gas im thermodynamischen Gleichgewicht verschwindet C , es werden gleich viele Teilchen in ein Phasenraumelement hineingestreut, wie hinausgestreut. Damit ist der Begriff “Stoß” schon fast definiert. Im Folgenden bezeichnen wir als Stoß einen

³Das ist, salopp ausgedrückt, der Satz von Liouville. Er kann natürlich auch korrekt hergeleitet werden. Er ist eigentlich nichts anderes, als die Kontinuitätsgleichung im Phasenraum und drückt die Erhaltung der Teilchenzahl aus.

Mechanismus, der zu einer Änderung der Verteilungsfunktion f führt. Stöße verhalten sich chaotisch und sind mit einer Entropiezunahme verbunden. Damit finden paradoxerweise im Gleichgewichtszustand keine Stöße statt!

Wir können Stöße auch intuitiv verstehen. Ist in einem Plasma der Debye-Radius wesentlich größer als der durchschnittliche Abstand der Teilchen, so sind Stöße sehr wahrscheinlich. Im gegenteiligen Fall sind "Stöße" häufig, die Stoßparameter aufweisen, welche größer sind, als der Debye-Radius. Diese Teilchen wechselwirken aber mit vielen Teilchen (weil ihr Stoßparameter größer ist, als der Debye-Radius), und damit ist dies ein kollektiver Effekt, der makroskopisch beschrieben werden kann, und nicht mit einer Entropiezunahme verknüpft ist. Sie tragen somit nicht zum Stoßintegral bei, und müssen im Kraft-Term $\vec{p}\partial f/\partial\vec{p}$ berücksichtigt werden.

Trennen wir die Felder \vec{E} und \vec{B} sowie die Verteilungsfunktion f auf in einen makroskopischen Teil \vec{E}_0 , \vec{B}_0 und f_0 und einen stochastisch fluktuierenden Teil \vec{e} , \vec{b} und δf , $\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{e}$, $\vec{B} = \vec{B}_0 + \vec{b}$ bzw. $f = f_0 + \delta f$ so werden die makroskopischen Größen \vec{E}_0 und \vec{B}_0 die Kraft \vec{p} bestimmen,

$$\vec{p} = q \left(\vec{E}_0 + \vec{v} \times \vec{B}_0 \right). \quad (5.41)$$

Durch Einsetzen der aufgeteilten Größen \vec{E} , \vec{B} und f in die Boltzmann-Gleichung kann diese in einen makroskopischen und in einen stochastischen Teil aufgeteilt werden. Letzterer ist linear in den stochastischen Fluktuationen. Übrig bleibt ein Kraft-Term, analog zu Gleichung 5.41, aber in den stochastischen Größen. Dieser kann als das Stoßintegral $C(f)$ aufgefasst werden. Wir machen für alle makroskopischen Größen den Ansatz $\vec{E}_0, \vec{B}_0, f_0 \sim e^{i\omega t - i\vec{k}\cdot\vec{x}}$. Ist die mittlere Stoßfrequenz $\nu \doteq (1/\text{mittl. Flugzeit}) \ll \omega$, so bedeutet dies, dass $C(f) \ll \partial f/\partial t$. Ist andererseits die mittlere freie Weglänge $l \sim |\vec{v}|/\nu \gg 1/|\vec{k}|$, so folgt $\nu \ll kv$ und damit, dass $C(f) \ll \vec{v}\partial f/\partial\vec{x}$.

Es werden nun drei Fälle unterschieden,

$C = 0$: Die Strömung ist laminar und dispersionsdominiert.

$C \neq 0, \delta f \ll f$: Die Strömung ist quasi-turbulent. Mikroturbulenz überlagert eine laminare Strömung.

$C \neq 0, \delta f \approx f$: Die Strömung ist turbulent. Sehr schwierig zu behandeln, keine Reihenentwicklungen oder Störungsrechnung mehr möglich.

5.3.2 MHD-Gleichungen

Oft wird in der Plasmaphysik die Näherung namens Magneto-Hydrodynamik (MHD) angewendet. Wie ihr Name besagt, wird dabei das Plasma als Flüssigkeit behandelt. Folgende vereinfachende Annahmen charakterisieren die MHD:

- Die charakteristischen Längen und Zeiten sind größer als die mittleren freien Weglängen und Flugzeiten,

- keine Dissipation, Viskosität und Wärmeleitung,
- unendliche elektrische Leitfähigkeit ($\sigma \rightarrow \infty$), d.h. Approximation der “eingefrorenen Feldlinien”, (ideale MHD)
- der Verschiebungsstrom $\partial \vec{E} / \partial t$ ist wesentlich kleiner als der induzierte Strom und kann vernachlässigt werden,
- die makroskopischen Fluss- und Wellengeschwindigkeiten sind wesentlich kleiner als die Lichtgeschwindigkeit.

Die Grundgleichungen der MHD sind,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\vec{\nabla} \cdot \rho \vec{v}, \text{ Kontinuitätsgleichung} \quad (5.42)$$

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = -\frac{1}{\rho} \nabla P + \sum_i \vec{F}_i, \text{ Eulergleichung} \quad (5.43)$$

$$P = P(\rho, T), \text{ Zustandsgleichung} \quad (5.44)$$

$$\frac{dS}{dt} = 0, \text{ Entropieerhaltung, wo} \quad (5.45)$$

$$\frac{d}{dt} \doteq \frac{\partial}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla}, \text{ die substantielle Ableitung ist,} \quad (5.46)$$

sowie die Maxwell-Gleichungen,

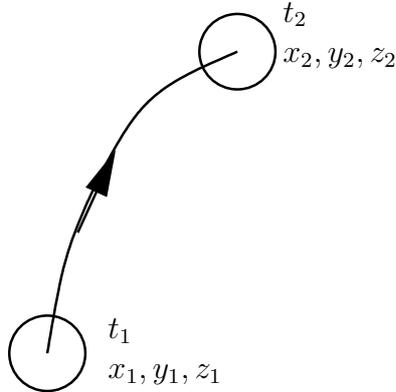
$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}, \quad (5.47)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0, \quad (5.48)$$

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\vec{\nabla} \times \vec{E}, \quad (5.49)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j}, \quad (5.50)$$

wo, wie erwähnt, $\dot{\vec{E}} = 0$. Diese Gleichungen sind durch den Kraftterm aneinander gekoppelt und beschreiben die Ausbreitung kleiner Störungen und von Wellen. Sie sind kollisionslos, $\dot{S} = 0$. Da sie dissipations- und dispersionslos sind, können sie die mikroskopischen Prozesse, die bei der Bildung von Schocks beteiligt sind nicht beschreiben.



Die soeben angedeutete substantielle Ableitung erklärt sich folgendermaßen. In einem bewegten Plasma (oder einer bewegten Flüssigkeit) setzt sich die Änderung einer Größe an einem bestimmten Ort aus zwei Termen zusammen. Einerseits kann sich an diesem Ort eine Größe \vec{X} zeitlich ändern, dies wird durch einen Term mit der partiellen Ableitung nach der Zeit ausgedrückt

$$\frac{\partial \vec{X}}{\partial t} dt.$$

Andererseits kann eine Änderung an diesem Ort aber auch dadurch entstehen, dass ein Plasmapakett an diesem Ort vorbei strömt (vorbei konvektiert wird), was durch

$$\frac{\partial \vec{X}}{\partial x} dx + \frac{\partial \vec{X}}{\partial y} dy + \frac{\partial \vec{X}}{\partial z} dz = (d\vec{r} \cdot \vec{\nabla}) \vec{X}$$

ausgedrückt wird. Die Änderung der Größe \vec{X} an einem Ort setzt sich aus beiden Termen zusammen, also

$$d\vec{X} = \frac{\partial \vec{X}}{\partial t} dt + (d\vec{r} \cdot \vec{\nabla}) \vec{X}. \quad (5.51)$$

Nach Division durch dt ergibt sich die **substantielle Ableitung** der Größe \vec{X}

$$\frac{d\vec{X}}{dt} = \frac{\partial \vec{X}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{X}. \quad (5.52)$$

Die Notwendigkeit der substantiellen Ableitung ergibt sich also dadurch, dass das sich bewegende Plasma in einem ortsfesten System betrachtet wird.

Betrachten wir z. B. die Änderung der Geschwindigkeit des Plasmas an einem Ort, so wird diese beschrieben durch

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v}.$$

Wir stoßen bei der Behandlung von Flüssigkeiten oder Plasmen notwendigerweise auf eine nicht-lineare Differentialgleichung. Dies erschwert die Beschreibung enorm.

5.3.3 Ausbreitung von Störungen

Wir betrachten im Folgenden die Ausbreitung von beliebig kleinen Störungen in einem sonst homogenen Medium. Dabei beschreiben wir die Störung in der magnetischen Feldstärke \vec{B} wieder als \vec{b} . Alle andern Größen behandeln wir ebenso. Wir vernachlässigen die Terme von Ordnung $o(b^2)$, bzw. $o(x^2)$, man sagt, wir *linearisieren* die MHD Gleichungen. Was folgt, ist also "nur"

eine linearisierte Version der MHD, und diese kann deshalb keine detaillierte Auskunft über die Prozesse *in* der Schockzone geben. Die linearisierten Gleichungen können in eine Gleichung für die Ausbreitungsgeschwindigkeit der Störungen umgeformt werden. Diese kann als Dispersionsrelation $\partial\omega/\partial\vec{k}(\vec{k})$ geschrieben werden, welche das Schwingungsspektrum des Systems charakterisiert. Man findet nach längerer Rechnung drei Wellenlösungen, deren Phasengeschwindigkeiten vom Winkel θ zwischen ihrer Ausbreitungsrichtung und der mittleren magnetischen Feldstärke \vec{B} und von der Schall- und Alfvén-geschwindigkeit C_S und C_A abhängen. Die drei Lösungen (modes) heißen entsprechend ihren Phasengeschwindigkeiten schnelle (Index F für fast), intermediäre (Index I) und langsame (Index S für slow) Wellen.

$$\begin{aligned} C_I^2 &= C_A^2 \cos^2 \theta \\ C_{F,S}^2 &= \frac{1}{2} \left[(C_A^2 + C_S^2) \pm \sqrt{(C_A^2 + C_S^2)^2 - 4C_A^2 C_S^2 \cos^2 \theta} \right]. \end{aligned} \quad (5.53)$$

Der langsame und schnelle mode sind kompressiv, der intermediäre nicht. Breitet sich eine Welle senkrecht zum Magnetfeld aus, so gilt $C_I = C_S = 0$ und nur der schnelle mode, der dann *magnetosonische* Welle genannt wird kann sich ausbreiten. Der Kompliziertheit der drei Modi wegen, werden diese oft in sogenannten Friedrichsdiagrammen (Figur 5.20) dargestellt.

5.4 Entstehung von Schocks

Wir betrachten eine zeitliche Sequenz von zwei Störungen, die nacheinander durch ein Plasma laufen. Beide Wellen seien im selben Mode, schnell oder langsam, weil der intermediäre mode nicht kompressiv ist, und damit das Plasma nicht aufzuheizen vermag. Dann unterscheiden sie sich trotzdem in ihrer Phasengeschwindigkeit, weil die zweite Welle durch das Plasma läuft, das bereits von der ersten komprimiert und aufgeheizt worden ist. Die Schall- und Alfvén-geschwindigkeiten sind also für die zweite Welle größer und sie holt die erste Welle ein. Die beiden Wellen superponieren und das Geschwindigkeitsprofil wird steiler. Die aufholende Störung kann aber die vorausseilende nicht überholen, weil sie ja sonst wieder langsamer und von der ersten wieder eingeholt würde. Die Superposition von vielen kleinen Störungen resultiert so in einer großen Störung, die durch die linearen MHD-Gleichungen 5.42 - 5.50 nicht treffend beschrieben wird. Dasselbe Verhalten stellt sich ein, wenn ein schnelles Plasmapakete ein langsames einholt, sofern das schnelle Paket sich mit Überschallgeschwindigkeit dem langsameren nähert. Es bildet sich eine kompressive Welle, deren Geschwindigkeitsprofil immer steiler wird. Dieser Prozess ist in der inneren Heliosphäre besonders wichtig. Er führt zu korotierenden Wechselwirkungsregionen (corotating interaction regions, CIRs) und aufgrund von koronalen Massenauswürfen (coronal mass ejections, CMEs) zu interplanetaren Schocks.

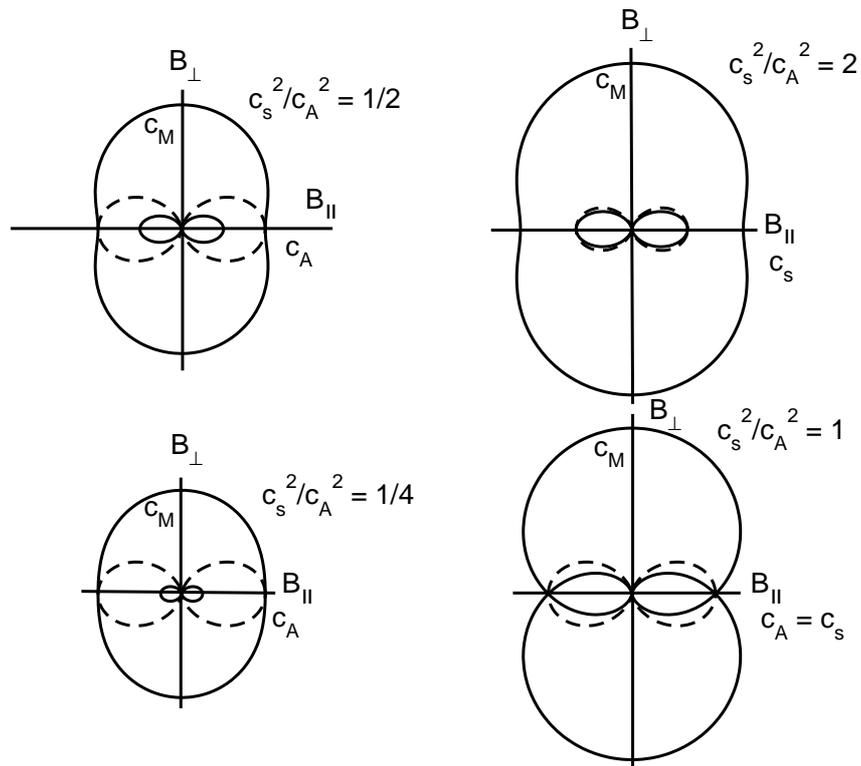


Abbildung 5.20: MHD Friedrichsdiagramme für die drei MHD Wellenmodi. Die gestrichelte Linie beschreibt den intermediären Mode. Geplottet sind vier Fälle, die sich im Plasma- β unterscheiden. Nach *Kennel et al.* (1985). c_s ist die normale Schallgeschwindigkeit, c_s die Geschwindigkeit der langsamen Welle und ist, wie der schnelle Mode, durchgezogen gezeichnet. Breitet sich die Welle senkrecht zu \vec{B} aus, heißt sie magnetosonische Welle.

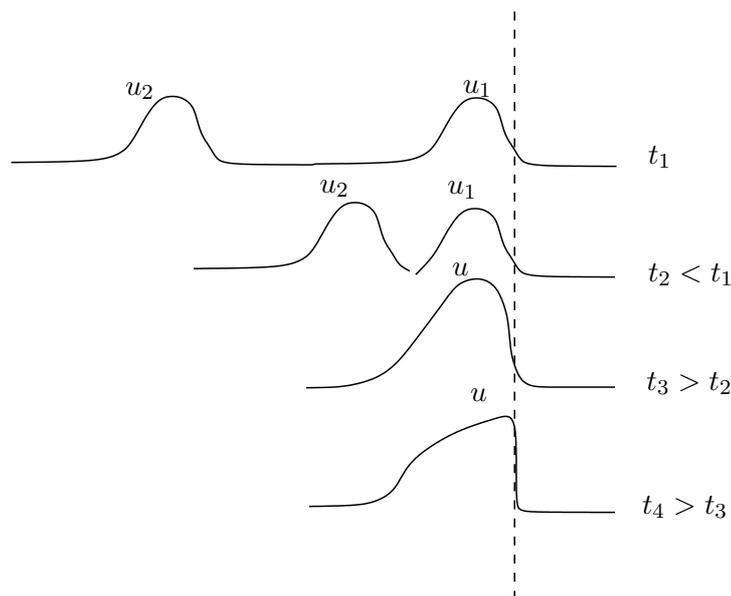


Abbildung 5.21: Die Entstehung von Schocks. Die nachfolgende Störung bewegt sich mit einer höheren Geschwindigkeit, als die führende und holt diese auf. Die Superposition von mehreren solchen Störungen führt dazu, dass sich die Störungen aufsteilen und nichtlinear werden.

Übung 5.6 Ein Beobachter in Erdnähe misst einen Sonnenwindstrom mit Geschwindigkeit $v_1 = 400 \text{ km/s}$, die zunimmt, und am nächsten Tag eine maximale Geschwindigkeit von $v_2 = 700 \text{ km/s}$. Anschließend nimmt die Geschwindigkeit wieder ab. Wann und in welchem Abstand von der Sonne wird der schnelle Sonnenwind den langsamen aufholen? [2.33 d, ca. 2 AU]

Dazu verwendet man die "kinematische Aufsteilungszeit" $\tau = v_2 / (v_2 - v_1) T$, wo T die Zeit zwischen dem Anfang der Geschwindigkeitszunahme und dem Geschwindigkeitsmaximum ist.

Das entstandene Geschwindigkeitsprofil kann natürlich nicht immer steiler werden. Es muss sich ein Gleichgewicht einstellen zwischen der Energie, die durch die Wellen oder das schnellere Plasmaket in die Schockregion eingebracht wird, und der Energie, die in irgendeiner, noch zu spezifizierenden, Art und Weise dissipiert wird. Die Entstehung von Schocks kann also nicht ohne zusätzliche Terme für Dissipation beschrieben werden, die in den MHD-Gleichungen 5.42 - 5.50 fehlen.

5.4.1 Dissipation und Dispersion

Die Entstehung von Schocks kann z. B. beschrieben werden, indem man die Euler-Gleichung 5.43 durch die Navier-Stokes Gleichung 5.54 ersetzt, in der die Viskositäten η und ξ auftreten. Zudem muss die endliche aber große elektrische

Leitfähigkeit σ durch das Ohm'sche Gesetz (Gleichung 5.55) berücksichtigt werden.

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}\vec{\nabla})\vec{v} = -\frac{1}{\rho}\nabla P + \sum_i \vec{F}_i + \frac{\eta}{\rho}\Delta\vec{v} + \frac{1}{\rho}\left(\xi + \frac{\eta}{3}\right)\vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{v}) \quad (5.54)$$

$$\vec{j} = \sigma\vec{E}. \quad (5.55)$$

Dabei wurde in der Navier-Stokes-Gleichung (oben) links die substantielle Ableitung angewendet (siehe Seite 154). Der Term $\eta/\rho \cdot \Delta\vec{v}$ beschreibt Scherkräfte (durch die dynamische Viskosität η), der kompliziertere Term $1/\rho(\xi + \eta/3)\vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{v})$ ist für kompressible Flüssigkeiten erforderlich. Die Navier-Stokes-Gleichung wird z. B. in der Vorlesung 'Computational hydrodynamics' hergeleitet. Das Ohm'sche Gesetz (Glg. 5.55) im Faraday'schen Gesetz (Glg. 5.49) eingesetzt ergibt

$$\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} = -\vec{\nabla} \times \vec{E}, \quad (5.56)$$

$$= -\frac{1}{\sigma}\vec{\nabla} \times \vec{j}, \quad (5.57)$$

$$= -\frac{1}{\sigma}\vec{\nabla} \times \frac{1}{\mu_0}(\vec{\nabla} \times \vec{B}), \quad (5.58)$$

$$= -\frac{1}{\sigma\mu_0}(\vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{B}) - \Delta\vec{B}), \quad (5.59)$$

$$= \frac{1}{\sigma\mu_0}\Delta\vec{B}, \quad (5.60)$$

eine Diffusionsgleichung für die magnetische Feldstärke \vec{B} . Mit der Berücksichtigung einer endlichen Leitfähigkeit tritt also Diffusion auf. Die magnetische Feldstärke dissipiert mit einer typischen Zeitkonstanten von

$$\tau \approx \sigma\mu_0 L^2, \quad (5.61)$$

wo L eine typische räumliche Skalenlänge ist. Die Dissipationszeit nimmt mit zunehmender Leitfähigkeit und zunehmender räumlicher Skalenlänge zu. Anders ausgedrückt, kleinskalige Störungen dissipieren rasch.

5.4.2 Dicke der Übergangsschicht oder Stabilisierung von Schocks

Die Dicke der Übergangsschicht, oder der Schockfront, kann direkt aus den Navier-Stokes Gleichungen abgeschätzt werden. In einem inkompressiblen Medium muss Der nicht-lineare Term $\rho(\vec{v}\vec{\nabla})\vec{v}$ durch den viskosen Term $\eta\Delta\vec{v}$ kom-

pensiert werden. In einer Dimension

$$\begin{aligned} \rho v \frac{\partial v}{\partial x} &\sim \eta \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}, \\ \rho \delta v \frac{\Delta \delta v}{\Delta x} &\sim \eta \frac{\Delta \delta v}{\Delta x^2}, \\ \Delta x &\sim \frac{\eta}{\rho \delta v}, \end{aligned} \quad (5.62)$$

wo δv die Geschwindigkeitsänderung bedeutet. In der gewöhnlichen Beschreibung von MHD Schocks, bei denen der viskose Term vernachlässigt wird, also $\eta = 0$ gesetzt ist, wird die Schockdicke somit als unendlich dünn angenommen. Die Dicke nimmt umgekehrt proportional zur Dichte zu, was insbesondere für Schocks im extrem dünnen interplanetaren Medium eine gewisse Dicke verlangt.

Ist nicht die Viskosität für die Dissipation verantwortlich, sondern z. B. die elektrische Leitfähigkeit, so muss die Dicke der Übergangsschicht anders abgeschätzt werden. Die dissipativen Prozesse haben alle eine Skalenlänge; ihre charakteristischen Längen müssen die magnetische und die gewöhnliche Reynoldszahl, sowie die Wärmeleitungsskalenlänge zu eins gehen lassen. Reynoldszahlen sind die dimensionslosen Zahlen, die sich aus den typischen Skalen eines Systems bilden lassen. Sie setzen sich zusammen aus der kinematischen Viskosität $\nu = \eta/\rho$, welche die Flüssigkeit beschreibt, aus einer typischen linearen Skala L und der Geschwindigkeit v der anströmenden Flüssigkeit:

$$\text{Re} = \frac{vl}{\nu} \quad \text{und} \quad (5.63)$$

$$\text{Re}_m = V_{ph} \frac{\tau}{L} = \frac{\omega}{k} \mu_0 \sigma \frac{1}{k}, \quad (5.64)$$

wo Re_m die magnetische Reynoldszahl und τ und L die typischen Zeit und Längenskalen aus Gleichung 5.61 sind, vgl. auch Kapitel 3.

(Randbemerkung, die ich mir nicht verkneifen kann: Dissipation und Dispersion sind eng miteinander verknüpft, dies besagt das Dissipations-Dispersionstheorem. Wir können dies hier unmittelbar einsehen: Entwickle wieder $\vec{B} = \vec{B}_0 + \vec{b}$ und setze ein in $\vec{\nabla} \times (\vec{v} \times \vec{B}) + \Delta \vec{B}/\mu_0 \sigma$ und mache den Ansatz $b \sim \exp(-i\omega t + ikx)$, dann folgt $-i\omega \vec{b} = \vec{\nabla} \times (\vec{v} \times \vec{B}_0 + \Delta \vec{b}/\mu_0 \sigma + \phi(\vec{b}^2))$ und somit $\vec{b}(-i\omega + k^2/\mu_0 \sigma) = \vec{\nabla} \times (\vec{v} \times \vec{B}_0)$. Damit lässt sich \vec{b} ausdrücken als $\vec{b} = 1/(1 + ik^2/\mu_0 \sigma \omega) \vec{\nabla} \times (\vec{v} \times \vec{B}_0)$. Dass der Vorfaktor von k abhängig ist, bedeutet, dass der Vorgang auch dispersiv ist. Wie schnell die Wellen zerfließen hängt von ihrer Wellenlänge ab.)

Damit haben wir im dissipativen Fall drei typische Längen festgestellt, die die Schockstruktur beeinflussen können: eine wird durch die Viskosität bestimmt, eine durch die magnetische und eine durch die gewöhnliche Reynoldszahl. Wir können uns nun wieder die Situation vorstellen, in der eine Störung durch ein Plasma läuft, und sich zu einem Schock mit einer Dicke entwickelt, die durch die magnetische Reynoldszahl gegeben ist. Die endliche Leitfähigkeit

entkoppelt nun die Flüssigkeitsschwingungen von den Schwingungen des magnetischen Feldes und die Welle kann sich nur noch mit Schallgeschwindigkeit fortpflanzen.

Nun folgt eine zweite Störung, die sich auch wieder zu einer Welle aufsteilt, mit der Skala der magnetischen Reynoldszahl, wo sie dann aber auch auf die Schallgeschwindigkeit abgebremst wird. Ist nun die Flüssigkeitsgeschwindigkeit downstream größer als die Schallgeschwindigkeit, so bleibt der erste Schock stabil. Ist dies nicht der Fall, kann die zweite Störung die erste aufholen, und es braucht einen weiteren Mechanismus, um die eingebrachte Energie zu dissipieren. Dies wird durch die viskose Dissipation erreicht, die den Schock auf einer kürzeren Skala stabilisiert. Es kann gezeigt werden, dass viskose Dissipation jeden Schock stabilisieren kann. Die Wärmeleitung kann nur ganz schwache Schocks stabilisieren.

Die enge Verwandtschaft von Dispersion und Dissipation legt den Verdacht nahe, dass auch Dispersion Schocks stabilisieren könnte. Dies ist in der Tat der Fall. Die kleinste Skalenlänge beruht auf der Ladungstrennung und ist gegeben durch den Debye-Radius, die nächstlängere Skalenlänge ist durch die Elektroneninertiallänge c/ω_e gegeben, und die längste Skalenlänge durch die Ioneninertiallänge c/ω_i . Die Inertiallängen werden bestimmt durch die Trägheit der Elektronen und Ionen. Auch im dispersiven Fall werden Störungen sich aufteilen, bis der Schock eine Dicke der längsten Skalenlänge erreicht, die ihn stabilisieren kann. Die Trägheit der Ionen vermag einen Schock nur in fast senkrechten Schocks zu stabilisieren.

Damit sind für magnetohydrodynamische Schocks hauptsächlich je zwei Skalenlängen für die Stabilisierung von dissipativen, bzw. dispersiven Schocks verantwortlich. Die Unterscheidung, wann ein Schock durch Dissipation oder durch Dispersion stabilisiert wird erfordert eine Abschätzung der Werte der verschiedenen Skalenlängen. Die längste Skalenlänge, die den Schock zu stabilisieren vermag, bestimmt die Natur des Schocks.

Weil bei dispersiven Schocks Plasmaoszillationen eine Rolle spielen (Ladungstrennung, Inertiallängen), liegt die Vermutung nahe, dass die Energie in Wellenform dissipiert werden kann. In der Tat werden bei dispersiven Schock sogenannte "precursor" Wellen im Whistler-mode beobachtet.

5.5 Interplanetare Stoßfronten (Schocks)

Die Skizze in Figur 5.22 definiert die Geometrie, die wir im folgenden verwenden werden. Das ungestörte Plasma nähert sich dem Schock von links (upstream), der Winkel zwischen Schocknormalen \vec{n} und \vec{B} wird als θ_{Bn} bezeichnet.

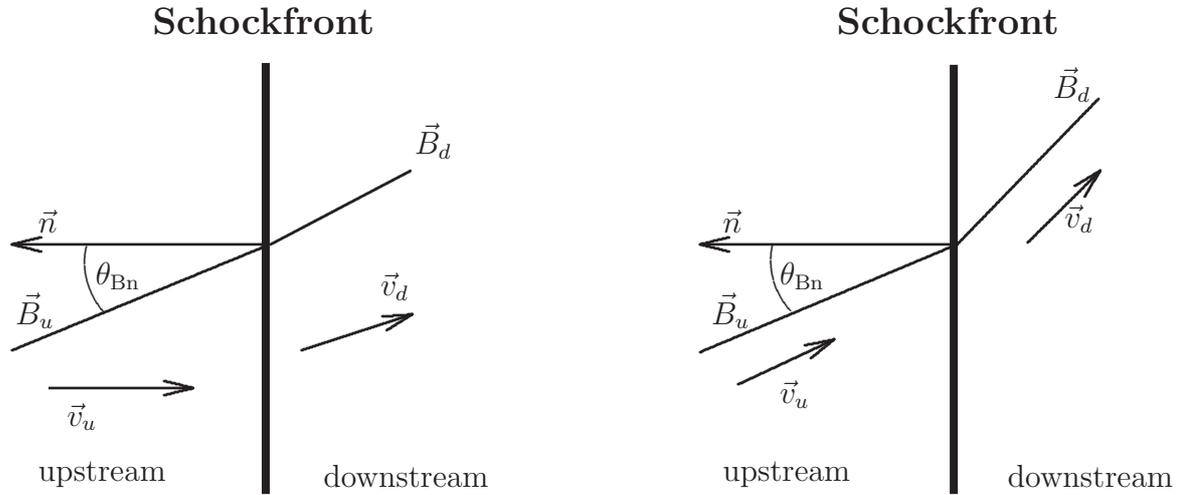


Abbildung 5.22: Geometrie von Schocks im Koordinatensystem des senkrechten Einfalls (links), sowie im de Hoffmann-Teller System (rechts).

5.5.1 Rankine-Hugoniot Beziehungen

Im Ruhesystem des Schocks strömt das ungestörte Plasma von links (upstream) auf den Schock zu und entfernt sich rechts (downstream) vom Schock. Links vom Schock ist die Machzahl größer als eins, eine Überschallströmung, rechts ist die Machzahl kleiner als eins, eine Unterschallströmung. Beim Übergang müssen verschiedene Größen erhalten bleiben. Es muss gleich viel Masse in den Schock fließen, wie aus ihm wegfließt, also

$$[\rho \vec{v} \cdot \vec{n}] \doteq \rho_u \vec{v}_u \cdot \vec{n} - \rho_d \vec{v}_d \cdot \vec{n} = 0. \quad (5.65)$$

Die eckigen Klammern bedeuten also die Differenz zwischen der jeweiligen Größe upstream und downstream. Aus dieser Gleichung können wir die Geschwindigkeit, v_s mit der sich der Schock durch das interplanetare Medium bewegt, abschätzen.

$$v_s = \frac{\rho_d \vec{v}_d - \rho_u \vec{v}_u}{\rho_d - \rho_u} \cdot \vec{n}. \quad (5.66)$$

Für die Entstehung von Schocks und die Beschleunigung von Teilchen an Schocks spielt nicht die Schockgeschwindigkeit, sondern ihre Komponente parallel zum Magnetfeld, $v_{s\parallel} = v_s / \cos(\theta_{Bn})$ eine wesentliche Rolle. Um einen Schock zu bilden, muss $v_{s\parallel} > v_A$ sein, um die entlang den Feldlinien propagierenden Alfvénwellen einholen zu können. Es ist nicht nötig, dass $v_s > v_A$, solange θ_{Bn} groß genug ist. Die alfvénische Machzahl des Schocks ist definiert als,

$$M_A \doteq \frac{v_s - v_u}{v_A}, \quad (5.67)$$

und gibt die Schockgeschwindigkeit im upstream System relativ zur Alfvén-geschwindigkeit an. Allerdings ist es mit dieser Definition möglich, dass auch

schnelle Schocks (vom fast mode) eine Machzahl kleiner als eins haben. Um dies zu vermeiden, wird die kritische Machzahl definiert,

$$M_c \doteq \frac{v_s - v_u}{v_A \cos \theta_{Bn}}. \quad (5.68)$$

In dieser Notation haben schnelle Schocks immer $M_c > 1$, die inexistenten intermediaären hätten $M_c = 1$ und langsame Schocks haben $M_c < 1$. Allerdings muss für diese Definition der Winkel θ_{Bn} bekannt sein.

Weiter muss der Impuls über die Schockdiskontinuität erhalten bleiben:

$$\left[\rho \vec{v} (\vec{v} \cdot \vec{n}) + \left(p + \frac{1}{2} \frac{\vec{B}^2}{\mu_0} \right) \vec{n} - \frac{(\vec{B} \cdot \vec{n}) \vec{B}}{\mu_0} \right] = 0. \quad (5.69)$$

Dies ist eine Vektorgleichung, und die Komponenten senkrecht zum Schock und parallel zum Schock erfüllen die Bedingungen separat. Dies bedeutet, dass eine Geschwindigkeit gefunden werden kann, in der upstream der Geschwindigkeitsvektor \vec{v}_u parallel zur Schocknormalen liegt, dies ist die linke Skizze in Abb. 5.22. Downstream ist die Geschwindigkeit schräg zur Normalen und zum Magnetfeld. Das de-Hoffmann-Teller System hingegen wird so gewählt, dass darin die Geschwindigkeiten \vec{v}_u und \vec{v}_d beide parallel zum Magnetfeld sind. Insbesondere wird dann das an der Schockfront induzierte elektrische Feld $\vec{v} \times \vec{B}$ verschwinden. Das Koordinatensystem bewegt sich also mit einer Geschwindigkeit $\vec{v}_{\text{dHT}} \times \vec{B} = -\vec{E}$.

Ferner muss über die Schockfront auch die Energie erhalten bleiben,

$$\left[\vec{v} \cdot \vec{n} \left(\frac{\rho \vec{v}}{2} + \frac{\gamma}{\gamma - 1} p + \frac{\vec{B}^2}{\mu_0} \right) - \frac{(\vec{B} \cdot \vec{n}) (\vec{B} \cdot \vec{v})}{\mu_0} \right] = 0, \quad (5.70)$$

wo $\gamma = c_p/c_v$ das Verhältnis der spezifischen Wärmen ist, sowie

$$[\vec{B} \cdot \vec{n}] = 0 \quad \text{und} \quad (5.71)$$

$$[\vec{n} \times (\vec{v} \times \vec{B})] = 0. \quad (5.72)$$

Diese Erhaltungsgleichungen erlauben es, aus der Kenntnis der makroskopischen Größen upstream eines MHD-Schocks, diese Größen auch downstream zu berechnen. Einfacher geht dies aber, wenn man aus diesen Gleichungen zuerst die Rankine-Hugoniot-Gleichungen herleitet, welche diese Größen direkt miteinander vergleichen.

$$\frac{\vec{v}_u}{\vec{v}_d} = \frac{1}{X}; \quad \frac{\vec{B}_u}{\vec{B}_d} = X \quad \text{etc.}, \quad (5.73)$$

wo X für rechtwinklige Schocks (siehe Abschnitt 5.5.2 auf Seite 163) die Lösung ist von

$$2(2 - X)X^2 + [2\beta_u + (\gamma - 1)\beta_u M_u^2 + 2]\gamma X - \gamma(\gamma + 1)\beta_u M_u^2 = 0, \quad (5.74)$$

wo β das Plasmabeta ist, und M_u die upstream Machzahl ist. Für den allgemeinen Fall ist die Gleichung komplizierter. Mit den Rankine-Hugoniot Gleichungen können aus der Kenntnis der upstream Größen diejenigen downstream direkt berechnet werden, allerdings muss die Rechnung für nicht senkrechte Schocks numerisch durchgeführt werden. Kritischer Parameter ist die Machzahl M_u .

5.5.2 Die Zoologie von Schocks

Wir sind einigen Ausdrücken, die in der Theorie der Schocks oft auftreten, schon begegnet. Es folgt eine kurze Beschreibung von einigen Ausdrücken:

fast Ein schneller Schock entsteht durch eine schnelle Welle, die sich durch das Medium fortpflanzt. Die schnelle Welle ist kompressiv und das Magnetfeld ist nach Passieren des Schocks zur Schocknormalen hin abgelenkt. Vgl. Abb. 5.23.

slow Ein schneller Schock entsteht durch eine langsame Welle, die sich durch's Medium fortpflanzt. Die langsame Welle ist kompressiv und das Magnetfeld ist nach Passieren des Schocks von der Schocknormalen weg abgelenkt. Vgl. Abb. 5.23.

forward Ein Vorwärtsschock propagiert relativ zu einem mit dem Sonnenwind (oder anderem Plasma) vorwärts,

reverse ein Rückwärtsschock hingegen rückwärts.

critical Ein superkritischer Schock hat eine Geschwindigkeit $v_{s\parallel} > M_c$. Weiter dient dieser Begriff zur Unterscheidung des Dissipations- und Dispersionsmechanismus.

parallel Ein paralleler Schock hat eine Schocknormale parallel zum Magnetfeld,

perpendicular ein senkrechter Schock hat eine Schocknormale senkrecht zum Magnetfeld und

quasi- die Fälle dazwischen werden quasi-parallel ($0 \geq \theta_{Bn} < 45^\circ$), oder quasi-senkrecht ($45 \geq \theta_{Bn} < 90^\circ$) genannt.

dissipative Der Schock wird hauptsächlich durch Dissipation stabilisiert.

dispersive Der Schock wird hauptsächlich durch Dispersion stabilisiert.

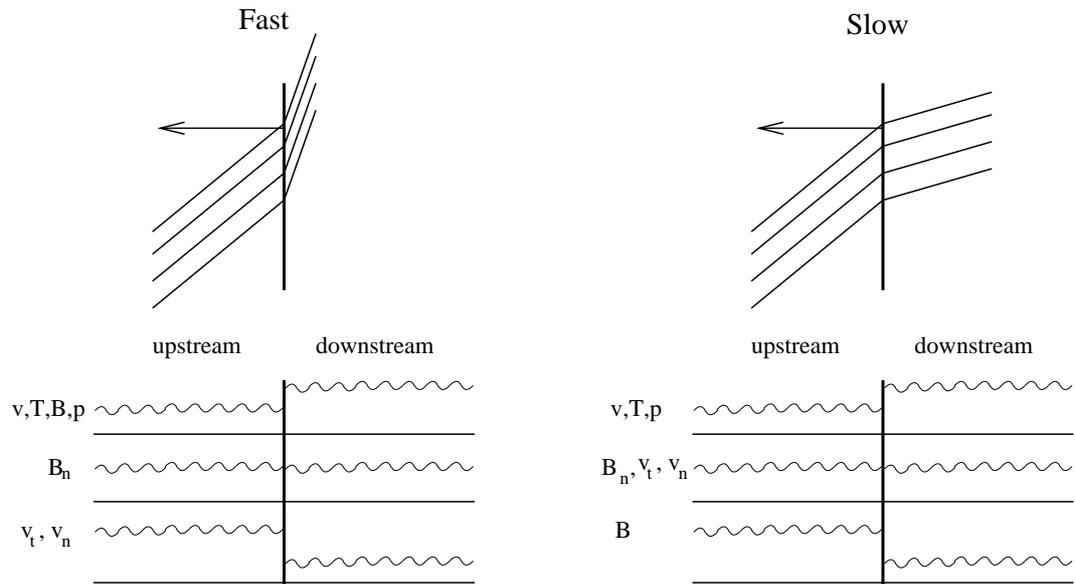


Abbildung 5.23: Änderungen im Magnetfeld und in Plasmaparametern in schnellen und langsamen Schocks.

5.5.3 Beschleunigung von Teilchen an Stoßfronten

Teilchenbeschleunigung an Schocks geschieht in vielen Situationen und hat besonders in der Astronomie und Astrophysik und auch in der Weltraumforschung eine große Bedeutung. Einige Beispiele mögen genügen:

- Planetare Aurorae (Erde, Jupiter) beschleunigen Teilchen typischerweise bis zu einigen keV/amu.
- Bugschocks und Magnetosphären beschleunigen Teilchen bis zu Energien von $\sim 100\text{MeV}$.
- Das interplanetare Medium stellt verschiedene Beschleunigungsprozesse, die wir in einer weiterführenden Vorlesung untersuchen werden.
- Flares auf der Sonne vermögen Teilchen zu sehr hohen Energien beschleunigen, oft werden dabei Kernreaktionen ausgelöst, deren Photonen oder z. T. sogar Neutronen auf der Erde gemessen werden können. Ähnliches Verhalten, oft auch mit größerer Aktivität, kann auch an anderen Sternen beobachtet werden.
- X-ray binary sources beschleunigen Elektronen mindestens zu MeV Energien, TeV und PeV Energien werden vermutet.
- Im galaktischen Zentrum wird die starke γ -Quelle Sgr A * beobachtet.
- Pulsare senden Photonen mit TeV-Energien aus, welche vermutlich von Bremsstrahlung noch energiereicherer geladener Teilchen herrühren.

- Supernovae und ihre Überbleibsel gehören zu den spektakulärsten bekannten Beschleunigungsarten im Universum. Abb. 5.24 zeigt ein solches Beispiel. Diese Aufnahmen im Röntgenlicht “sehen” die Bremsstrahlung von energiereichen Elektronen, die an der Stoßfront beschleunigt worden sind.
- Weitere Beispiele sind in *Blandford* (1994) genannt.

Bei den beobachteten Energien fragt es sich natürlich, woher denn die dafür notwendige Energie stammt. In planetaren Magnetosphären und auf der Sonne spielt die im Magnetfeld gespeicherte Energie natürlich die dominante Rolle, während diese im interplanetaren Raum im Vergleich zur kinetischen Energie des Plasmas unwichtig ist. Für exotischere Teilchenbeschleuniger (z. B. Pulsare, AGN, binäre Systeme) scheint Rotationsenergie eine wichtige Rolle zu spielen. Im Folgenden beschränken wir uns auf Prozesse in der Heliosphäre, bei der die Umwandlung von kinetischer Energie des Plasmas in die Energie einzelner beschleunigter Teilchen die dominante Energiequelle darstellt. Allerdings wollen wir nicht vergessen, dass die Beschleunigungsprozesse, die wir jetzt untersuchen werden von der Energiequelle unabhängig sind, und damit, wo anwendbar, auch auf andere Situationen übertragen werden können. Beschleunigung an oder in der Umgebung von Schocks geschieht durch drei Prozesse:

- Stochastische Beschleunigung. Fermibeschleunigung ist das Beispiel. Teilchen werden in der Turbulenz hinter dem Schock beschleunigt.
- Diffusive Beschleunigung. Reflexion an Inhomogenitäten im Plasma up- und downstream des Schocks.
- Schock-Drift Beschleunigung. Beschleunigung am induzierten \vec{E} Feld.

Wir gehen im Folgenden auf die drei Prozesse in etwas mehr Detail ein.

Fermibeschleunigung

Wir haben nun gesehen, wie sich die Bewegung von Teilchen im magnetischen Feld beschreiben lässt, aber die Frage, wie sich Teilchen beschleunigen lassen, haben wir immer noch nicht behandelt. Dabei stoßen wir auf eine fundamentale Schwierigkeit. Wir haben gesehen, dass im Plasma das Magnetfeld eingefroren ist, die elektrische Leitfähigkeit also groß ist (gleich unendlich gesetzt wird). Damit können sich auch keine elektrischen Felder bilden, sie würden sofort wieder durch die unendliche Leitungsfähigkeit ausgeglichen. Ein Magnetfeld kann aber keine Arbeit verrichten und damit lässt sich in einem Magnetfeld keine Energie gewinnen. Um diese Unklarheit zu beseitigen, wollen wir exemplarisch den Prozess der Fermibeschleunigung etwas detaillierter betrachten.

Die Erhaltung der ersten adiabatischen Invarianten hat eine wichtige Konsequenz für die Beschleunigung von Teilchen. Begegnet ein Teilchen einem magnetischen Spiegel, wie in Abb. 5.26 dargestellt, so wird die Erhaltung der

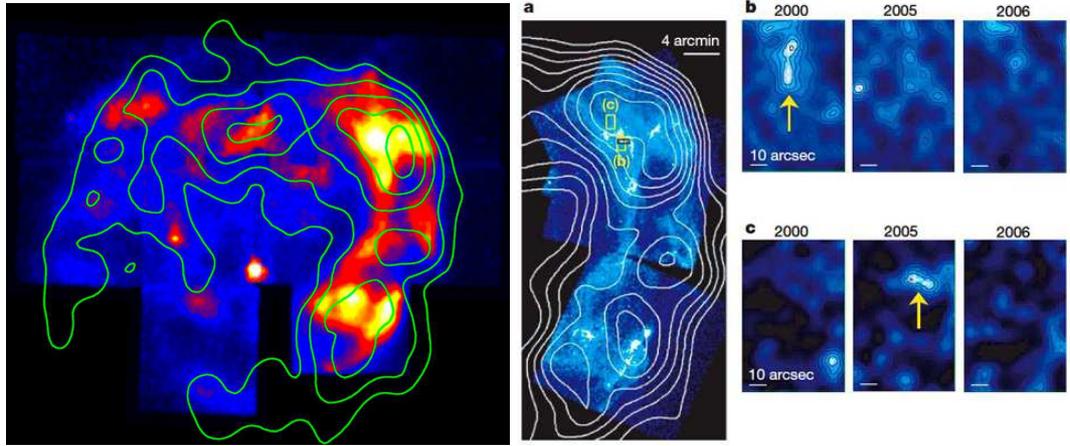


Abbildung 5.24: Beschleunigung von Elektronen an Supernova-Stoßfronten. Links ein Bild von SN RXJ1713.7-3946 aufgenommen vom japanischen Röntgensatelliten Suzaku. Die Aufnahme rechts zeigt einen Ausschnitt mit dem NASA Röntgensatellit Chandra, der eine hohe zeitliche Variabilität im Röntgenlicht. SN RXJ1713.7-3946 ist vor ca. 1600 Jahren explodiert. Die Konturen in der linken Aufnahme zeigen Messungen der Gamma-Intensität von HESS.

ersten magnetischen Invarianten dazu führen, dass die Richtung der Bewegung des Teilchens umkehrt. Dies kann einfach eingesehen werden. Wenn kein elektrisches Feld vorhanden ist, ist die kinetische Energie des Teilchens aus zwei Termen zusammengesetzt: $E_{\text{kin}} = 1/2mv_{\parallel}^2 + 1/2mv_{\perp}^2 = \text{const.}$ Der zweite Term ist aber gerade gleich μB . Wegen der Erhaltung von μ bei zunehmendem B muss also der erste Term abnehmen, bis die gesamte kinetische Energie in der Larmorbewegung konzentriert ist. Ist dies geschehen, spürt das Teilchen die Divergenz des magnetischen Feldes und wird reflektiert. Netto wird der Impuls umgekehrt, $\Delta p = 2p$. Die Stärke des Magnetfeldes im magnetischen Spiegel, sowie des Pitchwinkels des Teilchens bestimmen, welche Teilchen durch den Spiegel reflektiert, und welche transmittiert werden. Dies ist natürlich für Anwendungen z. B. in der Kernfusion von größter Bedeutung, zwei magnetische Spiegel bilden eine magnetische Flasche. Ein weiteres Beispiel sind Elektronen-Zyklotron-Resonanz-Ionenquellen, in denen Elektronen auf hohe Energien beschleunigt werden und so die Ionen mehrfach ionisieren (Abb. 5.25). Welche Teilchen werden reflektiert? Dazu betrachten wir die Teilchen in der Region, in der das Magnetfeld konstant ist, wo $\vec{B} = \vec{B}_0$, und im Spiegel an der Stelle, wo das Teilchen reflektiert wird, $\vec{B} = \vec{B}_1$. Wegen der Invarianz von μ gilt nun

$$\frac{1}{2}m \frac{v_{\perp 0}^2}{B_0} = \frac{1}{2}m \frac{v_{\perp 1}^2}{B_1} \quad (5.75)$$

und wegen der Erhaltung der kinetischen Energie

$$v_{\perp 1}^2 = v_{\perp 0}^2 + v_{\parallel 0}^2 = v_0^2. \quad (5.76)$$

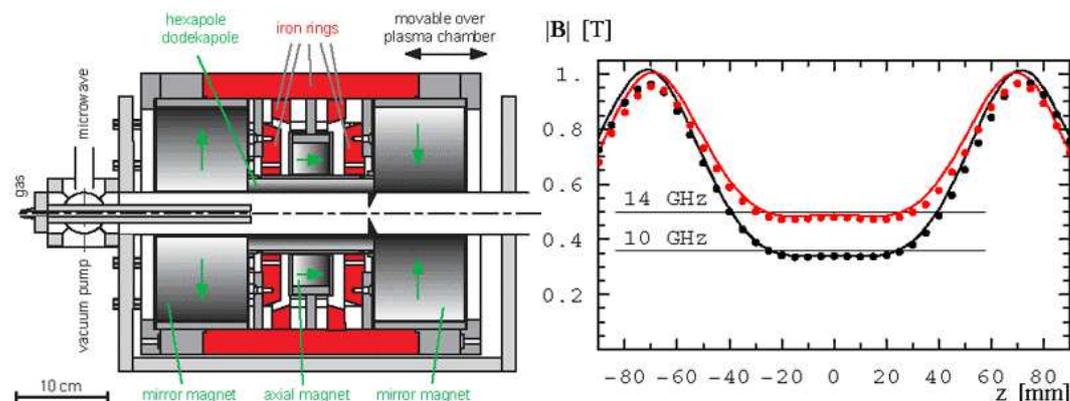


Abbildung 5.25: Schnitt und Funktionsprinzip der Kieler Ionenquelle. Nach *Stalder* (2008).

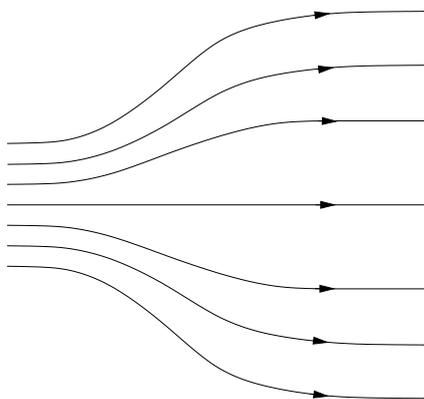


Abbildung 5.26: Magnetischer Spiegel.

Wir formen Gleichung 5.75 um und setzen Gleichung 5.76 ein,

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2}m \frac{v_{\perp 0}^2}{B_0} &= \frac{1}{2}m \frac{v_{\perp 1}^2}{B_1}, \\
 \frac{B_0}{B_1} &= \frac{v_{\perp 0}^2}{v_{\perp 1}^2}, \\
 &= \frac{v_{\perp 0}^2}{v_0^2}, \\
 &= \sin^2 \theta.
 \end{aligned} \tag{5.77}$$

Würden die Pitchwinkel aller Teilchen im Gebiet wo $\vec{B} = \vec{B}_0$ gemessen, so würden genau die vom Spiegel reflektiert, die einen Pitchwinkel aufweisen, für den gilt, $\theta > \theta_m$, wo

$$\sin^2 \theta_m = \frac{B_0}{B_m}. \tag{5.78}$$

Die reflektierten Teilchen können nun beschleunigt werden, wenn sich die Spiegel mit einer Geschwindigkeit U bewegen. Wir betrachten die Energie, die

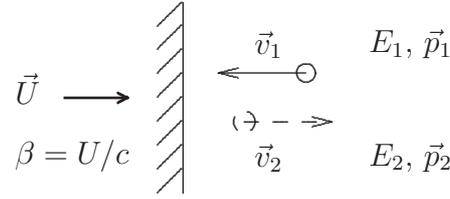


Abbildung 5.27: Fermi Beschleunigung der ersten Art.

das Teilchen bei einer Reflexion gewinnt. Dazu transformieren wir in das Ruhesystem des Spiegels, also wo $U = 0$. In diesem System gewinnt das Teilchen keine Energie und es ist $E_1 = E_2$. Anschließend kann wieder in das ursprüngliche Bezugssystem zurücktransformiert und die gewonnene Energie berechnet werden. Zur detaillierten Berechnung verwendet man am einfachsten Vierervektoren (E, \vec{p}) . Die Größen im Ruhesystem des Spiegels werden wir mit Strichen versehen. Dann ist

$$\begin{pmatrix} E'_1 \\ p'_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_1 & -\gamma_1\beta_1 \\ -\gamma_1\beta_1 & \gamma_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_1 \\ p_1 \end{pmatrix}, \quad (5.79)$$

$$\begin{pmatrix} E'_2 \\ p'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_2 & -\gamma_2\beta_2 \\ -\gamma_2\beta_2 & \gamma_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_2 \\ p_2 \end{pmatrix}, \quad (5.80)$$

wo $\beta_1 \doteq U/c$, $\beta_2 \doteq -U/c$ und $\gamma_i \doteq 1/\sqrt{1-\beta_i^2}$. Im Ruhesystem des Spiegels ist $p_2 = -p_1$ und $E'_1 = E'_2$ und damit

$$\begin{pmatrix} E'_2 \\ p'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_1 & -\gamma_1\beta_1 \\ \gamma_1\beta_1 & -\gamma_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_1 \\ p_1 \end{pmatrix}. \quad (5.81)$$

Nun transformieren wir ins ursprüngliche Bezugssystem zurück,

$$\begin{pmatrix} E_2 \\ p_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_2 & -\gamma_2\beta_2 \\ -\gamma_2\beta_2 & \gamma_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_1 & -\gamma_1\beta_1 \\ \gamma_1\beta_1 & -\gamma_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_1 \\ p_1 \end{pmatrix}, \quad (5.82)$$

$$= \begin{pmatrix} \gamma_1\gamma_2 - \gamma_1\gamma_2\beta_1\beta_2 & -\gamma_1\gamma_2\beta_1 + \gamma_1\gamma_2\beta_2 \\ -\gamma_1\gamma_2\beta_2 + \gamma_1\gamma_2\beta_1 & \gamma_1\gamma_2\beta_1\beta_2 - \gamma_1\gamma_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_1 \\ p_1 \end{pmatrix}. \quad (5.83)$$

Also ist

$$E_2 = (\gamma_1\gamma_2 - \gamma_1\gamma_2\beta_1\beta_2) E_1 + (-\gamma_1\gamma_2\beta_1 + \gamma_1\gamma_2\beta_2) p_1. \quad (5.84)$$

Wegen $\beta_2 = -\beta_1 = \beta$ und $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma$ wird

$$E_2 = (\gamma^2 + \gamma^2\beta^2) E_1 + 2\gamma^2\beta p_1, \quad (5.85)$$

$$\frac{E_2}{E_1} = \frac{1 + 2\beta p_1/E_1 + \beta^2}{1 - \beta^2}, \quad (5.86)$$

$$\frac{E_2}{E_1} = \frac{1 + 2\beta\beta_{\text{Teilchen}} + \beta^2}{1 - \beta^2}, \quad (5.87)$$

weil $p_1/E_1 = \beta_{\text{Teilchen}}$. Weil $\beta^2 > 0$ gewinnt das Teilchen also Energie. Im Ruhesystem des turbulenten Mediums sind die Geschwindigkeiten der Spiegel isotrop verteilt, d.h. in jedem Punkt hat es gleich viele Spiegel, welche auf den Punkt zukommen, wie sich von ihm wegbewegen. Weil sich das Teilchen aber selber bewegt, wird es auf mehr Spiegel treffen, die auf es zukommen, als von ihm weg, was also netto mit einer Energiezunahme verbunden sein muss. Dieser Beschleunigungsprozess wurde von E. Fermi vorgeschlagen *Fermi* (1949) und heißt deshalb Fermibesleunigung. Geschieht die Beschleunigung, wie hier beschrieben, durch turbulente Strukturen, heißt die Beschleunigungsart Fermibesleunigung zweiter Art, geschieht die Beschleunigung durch zwei systematisch auf sich zu bewegendem Spiegel, wie z. B. bei einem Schock, heißt sie Fermibesleunigung erster Art. Die Unterscheidung beruht auf der Potenz, mit der die Geschwindigkeit der Spiegel in die Gleichungen eingeht. Mehr dazu in einer weiterführenden Vorlesung.

Zu bemerken bleibt, dass in der Konfiguration eines magnetischen Spiegels (Abb. 5.26) Fermibesleunigung den Pitchwinkel immer kleiner machen wird, und dass die energiereichen Teilchen dann aus der magnetischen Flasche entweichen. Aus der ursprünglichen Verteilung der Pitchwinkel und der Geschwindigkeit der Relativbewegung der Spiegel gegen das Plasma, kann das Energiespektrum der entwichenen Teilchen, sowie der Teilchen in der Flasche berechnet werden.

Abbildung 5.28 zeigt ein Energiespektrum der galaktischen kosmischen Strahlung. Es folgt über einen weiten Bereich einem Potenzgesetz, welches aus Theorien zur Schockbeschleunigung folgt, wie wir im Folgenden sehen werden.

Stochastische Beschleunigung

Teilchen werden hinter dem Schock im turbulenten Medium beschleunigt. Die durch den Schock selber generierten Wellen haben Wellenvektoren in alle Richtungen. Teilchen gewinnen oder verlieren Energie, je nachdem, ob sie die Welle einholen, oder gegen sie laufen. Wegen der größeren Wahrscheinlichkeit, gegen eine Welle zu laufen, als eine einzuholen, gewinnen die Teilchen netto Energie. Dies ist der zweite Fermi-Beschleunigungsprozess. Bei jedem Stoß wird also eine Energie gewonnen, die proportional zur bereits vorhandenen ist, bzw. der Impulsgewinn ist proportional zum Impuls.

Das Spektrum stochastisch beschleunigter Teilchen kann einfach aus der Kontinuitätsgleichung im Impulsraum hergeleitet werden.

$$\frac{\partial}{\partial p} [\dot{p}f(p)] + \frac{f(p)}{T} = Q\delta(p - p_0), \quad (5.88)$$

wo $f(p)$ die Verteilungsfunktion im Impulsraum, T die mittlere Zeit, die ein Teilchen im Beschleunigungsprozess verbringt, \dot{p} die durchschnittliche Impulsänderung und Q ein Quellterm seien. Setzen wir nach den vorhergehenden Überlegungen $\dot{p} = \alpha p$ in Gleichung 5.88 ein, so erhalten wir

$$\frac{\partial}{\partial p} [\alpha p f(p)] + \frac{f(p)}{T} = Q\delta(p - p_0). \quad (5.89)$$

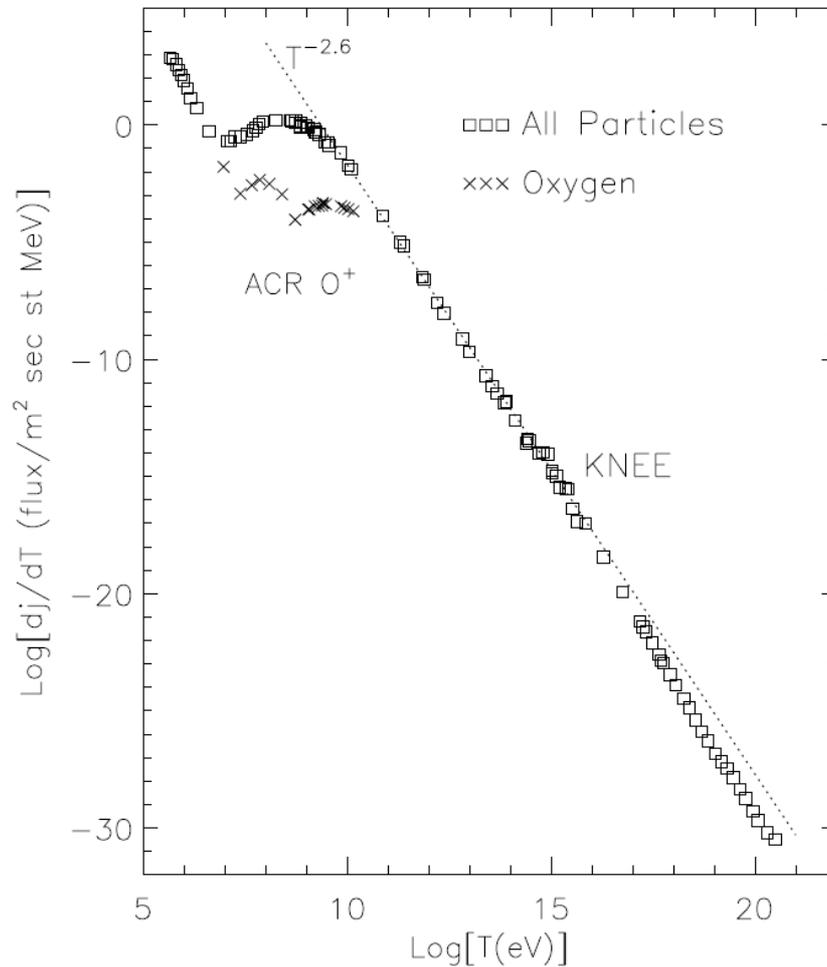


Abbildung 5.28: Das Energiespektrum der galaktischen kosmischen Strahlung folgt über einen weiten Bereich einem Potenzgesetz. Aus *Jokipii* (2001).

Eine strengere Behandlung des Problems würde einen Term zweiter Ordnung beinhalten, welcher die Diffusion im Impulsraum beschreiben würde. Von da kommt auch der Name “stochastische Diffusion”. Interessanterweise wird das Resultat dadurch nicht wesentlich verändert und wir folgen hier *Jones* (1994) und behandeln deshalb den einfacheren Fall der gewöhnlichen Differentialgleichung erster Ordnung. Diese kann einfach gelöst werden

$$\begin{aligned}
 f &= e^{-\int dp \frac{(1+\frac{1}{\alpha T})}{p}} \int dp \frac{Q}{\alpha p} \delta(p - p_0) e^{\int dp \frac{(1+\frac{1}{\alpha T})}{p}}, \\
 &= e^{-(1+\frac{1}{\alpha T}) \ln |p|} \int dp \frac{Q}{\alpha p} \delta(p - p_0) e^{\ln |p| (1+\frac{1}{\alpha T})}, \\
 &= p^{-(1+\frac{1}{\alpha T})} \frac{Q}{\alpha p_0} p_0^{(1+\frac{1}{\alpha T})},
 \end{aligned}$$

$$= \frac{Q}{\alpha p_0} \left(\frac{p}{p_0} \right)^{-(1+\frac{1}{\alpha T})}. \quad (5.90)$$

Es ergibt sich also ein Potenzgesetz im Impuls, sofern das Produkt αT vom Impuls p unabhängig ist. Die Frage ist natürlich, ob dies der Fall ist. aus Beobachtungen weiß man lediglich, dass $\alpha T \sim 1$, aber warum dass dieses Produkt vom Impuls unabhängig sein muss wird durch die Herleitung nicht erklärt. Der eigentliche Beschleunigungsprozess, den wir bis jetzt elegant unter den Tisch gewischt haben, scheint Landaudämpfung zu sein. Die Teilchen, die langsamer als die beschleunigenden Wellen laufen, werden beschleunigt, die schnelleren geben an die Welle Energie ab und werden so abgebremst. Die beteiligten Wellen sind Alfvénwellen sowie magnetosonische Wellen. Beide streuen besonders den Pitchwinkel der Teilchen und sind damit nicht besonders gut geeignet, Teilchen zu beschleunigen, sondern ihre Richtung zu ändern. Damit vermag stochastische Beschleunigung Teilchen nicht zu besonders hohen Energien zu beschleunigen, dafür scheint der Prozess aber die wichtigste Quelle zur “Vorbeschleunigung” zu sein. Er beschleunigt Teilchen auf eine höhere Energie, die ausreicht, damit die Teilchen dann von einem effizienteren Prozess zu den beobachteten Energien beschleunigt zu werden. Oft wird deshalb gesagt, stochastische Beschleunigung sei wichtig, um die “seed population” für weitere Beschleunigungsmechanismen zu liefern.

Diffusive Beschleunigung

Wie bei der stochastischen Beschleunigung gewinnt bei der diffusiven Beschleunigung ein Teilchen bei jedem Durchgang durch die Schockfront ein δp , das proportional zum bereits vorhandenen Impuls ist.

Credo der Schockbeschleunigung:
“Wer hat, dem wird gegeben.”

Im Unterschied zu stochastischen Beschleunigung, bei der die Teilchen in der Turbulenz **auf der einen Seite des Schocks** beschleunigt werden, werden die Teilchen in der diffusiven Beschleunigung von der Turbulenz **auf beiden Seiten des Schocks** gestreut, und können so die Schockfront mehrmals passieren und jedesmal ein $\delta p \propto p$ gewinnen. Es leuchtet ein, dass dieser Prozess wesentlich effizienter beschleunigt als stochastische Beschleunigung. Nach N Durchgängen hat deshalb ein Teilchen den Impuls

$$p(N) = p_0 \prod_{i=1}^N \left(1 + \left[\frac{\delta p}{p} \right]_i \right). \quad (5.91)$$

Der Term in eckigen Klammern könnte vom Impuls abhängig sein, weshalb wir ihn hier mit dem Index i versehen haben. Wir definieren nun einen Zyklus in der diffusiven Schockbeschleunigung als eine Abfolge, in der das Teilchen den Schock von downstream nach upstream durchquert, anschließend

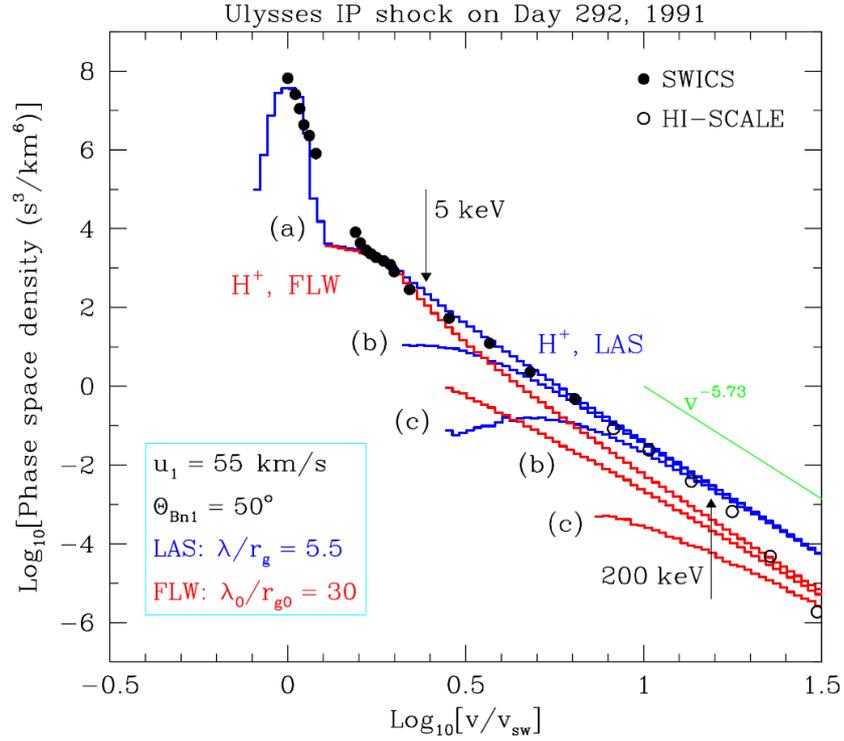


Abbildung 5.29: Energiespektrum von Protonen an einem interplanetaren Schock beobachtet durch SWICS und HISCALE auf Ulysses. Von *Baring* und *Summerlin* (2008).

in der Turbulenz reflektiert wird, und den Schock nun wieder von upstream nach downstream zurück durchquert und von der Turbulenz wieder zurück zur Schockfront befördert wird. Ein Zyklus beinhaltet also zwei Durchquerungen des Schocks.

Während jedes Zyklus besteht eine kleine Wahrscheinlichkeit ϵ_i , dass das Teilchen downstream vom Schock von der Strömung mitgenommen wird und nie mehr zum Schock zurückkehrt. Die Wahrscheinlichkeit, dass das Teilchen N Zyklen des Prozesses überlebt ist damit

$$\mathcal{P}(N) = \prod_{i=1}^N (1 - \epsilon_i). \quad (5.92)$$

Wir logarithmieren Gleichungen 5.91 und 5.92

$$\begin{aligned} \ln \left[\frac{p(N)}{p_0} \right] &= \sum_{i=1}^N \ln \left(1 + \left[\frac{\delta p}{p} \right]_i \right), \\ &\approx \sum_{i=1}^N \left[\frac{\delta p}{p} \right]_i \quad \text{und} \\ \ln [\mathcal{P}(N)] &= \sum_{i=1}^N \ln (1 - \epsilon_i), \end{aligned} \quad (5.93)$$

$$\approx -\sum_{i=1}^N \epsilon_i, \quad (5.94)$$

und bilden das Verhältnis

$$\frac{\ln \mathcal{P}(N)}{\ln [p(N)/p_0]} = \frac{-\sum_{i=1}^N \epsilon_i}{\sum_{i=1}^N \left[\frac{\delta p}{p} \right]} \doteq -\Gamma(N?), \quad (5.95)$$

woraus

$$\mathcal{P}(N) = \left(\frac{p}{p_0} \right)^{-\Gamma(N?)} \quad (5.96)$$

folgt. Dieser Ausdruck gibt uns an, wie groß die Wahrscheinlichkeit ist, dass ein Teilchen mindestens den Impuls p hat. Das Fragezeichen nach dem N soll uns daran erinnern, dass wir nicht wissen, ob der Exponent Γ von N abhängt, oder nicht. Falls ja, ist Gleichung 5.96 kein Potenzgesetz im Impuls.

Die Ähnlichkeit mit stochastischer Beschleunigung kann wie folgt eingesehen werden. Wir definieren τ_i als die für den i -ten Zyklus notwendige Zeit. Dann ist

$$\frac{\sum_{i=1}^N \left[\frac{\delta p}{p} \right]_i}{\sum_{i=1}^N \tau_i} = \frac{1}{p} \frac{d}{dt} = \alpha(N), \quad (5.97)$$

$$\frac{\sum_{i=1}^N \epsilon_i}{\sum_{i=1}^N \tau_i} = \frac{\text{P(Verlust)}}{\text{Zeit}} = \frac{1}{T(N)}. \quad (5.98)$$

Schreiben wir $\Gamma(N?)$ aus Gleichung 5.95 in der obigen Form, also erweitert mit der Summe über die Zykluszeiten, so erhalten wir unmittelbar

$$\Gamma(N) = \frac{1}{\alpha(N)T(N)} \quad (5.99)$$

und das Spektrum ist damit

$$f(P) \propto \left(\frac{p}{p_0} \right)^{-\left(1 + \frac{1}{\alpha(N)T(N)}\right)}, \quad (5.100)$$

wie in der stochastischen Beschleunigung.

Um nun herauszufinden, ob das Produkt $\alpha(N)T(N)$ nicht von N (oder vom Impuls p) abhängt, müssen wir den Term, der den Impulsgewinn beschreibt näher untersuchen. Es kann gezeigt werden (ohne Herleitung, siehe *Jones (1994)* für Literaturhinweise), dass die Rate der Impulsänderung gegeben ist durch

$$\dot{p} = -\frac{p}{3} \vec{\nabla} \cdot \vec{u}, \quad (5.101)$$

wo \vec{u} die Fließgeschwindigkeit des Plasmas ist. Da nur die Geschwindigkeit parallel zum Normalenvektor zur Schockfront eine Rolle spielt, definieren wir diese als die x -Richtung und schreiben

$$\dot{p} = -\frac{p}{3} \frac{\partial u}{\partial x}. \quad (5.102)$$

Wir integrieren diese Gleichung von der upstream Seite zur downstream Seite entlang einer Teilcentrajektorie

$$\begin{aligned}\delta p &= \int_u^d \dot{p} dt, \\ &= -\frac{1}{3} \int_u^d p \left(\frac{du}{dx} \right) \frac{dx}{v_x}, \\ &= \frac{1}{3} \frac{p}{v_x} (u_u - u_d).\end{aligned}\quad (5.103)$$

Diese Gleichung beschreibt den Impulsgewinn für ein Teilchen. Um den durchschnittlichen Impulsgewinn für alle Teilchen, die den Schock durchqueren zu berechnen, muss dieser Ausdruck über den Fluss durch den Schock gemittelt werden. Unter der Annahme, die Teilchen seien isotrop folgt

$$\left[\frac{1}{v_x} \right] = \frac{2}{v}, \quad (5.104)$$

und weil ein Zyklus aus zwei Durchquerungen des Schocks besteht finden wir

$$\left[\frac{\delta p}{p} \right]_i = \frac{4}{3} \frac{u_u - u_d}{v_i}. \quad (5.105)$$

Um das Spektrum der Teilchen zu erhalten, müssen wir noch die Wahrscheinlichkeit, dass die Teilchen zurückkehren, berechnen. Diese ist gegeben durch das Verhältnis der Flüsse durch den Schock von der einen Seite relativ zur anderen. Abbildung 5.30 illustriert den Fall, wo wir den Fluss von rechts nach links mit dem von links nach rechts vergleichen. Im downstream Bezugs-

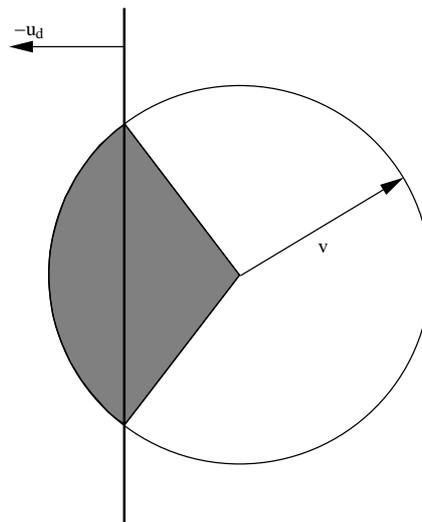


Abbildung 5.30: Relative Flüsse von schockquerenden Teilchen.

system bewegt sich der Schock mit einer Geschwindigkeit $-u_d$ nach links und

alle Teilchen mit einem Geschwindigkeitsvektor im schraffierten Kegel können ihn aufholen und von rechts nach links durchqueren. Alle andern Teilchen passieren den Schock von links nach rechts. Die normierten Flüsse von rechts nach links und umgekehrt sind damit

$$\frac{|\int_{-v}^{-u} dv_x(u+v_x)|}{\int_{-v}^v dv_x} = \frac{(v-u)^2}{4v}, \quad (5.106)$$

$$\frac{|\int_{-u}^v dv_x(u+v_x)|}{\int_{-v}^v dv_x} = \frac{(v+u)^2}{4v}. \quad (5.107)$$

Die gesuchte Wahrscheinlichkeit, zurückreflektiert zu werden ist durch das Verhältnis der beiden Ausdrücke gegeben,

$$\mathcal{P}_i = \frac{(v_i - u)^2}{(v_i + U)^2} = \left(\frac{1 - u/v_i}{1 + u/v_i} \right)^2 \approx 1 - \frac{4u}{v_i} \quad \text{für } u \ll v_i. \quad (5.108)$$

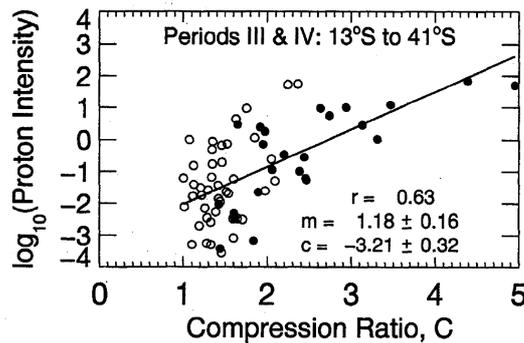


Abbildung 5.31: Teilchenintensität gegen Kompressionsverhältnis r (hier heißt es C). Aus *Desai et al.* (1998).

relativistische Schocks $r < 4$ sein muss, ist also $\Gamma \geq 1$, und weil die meisten Schocks stark sind (also $r \sim 4$), ist Γ nahe bei Eins, wie Beobachtungen zeigen. Ferner sehen wir, dass der Exponent durch das Kompressionsverhältnis r gegeben ist.

In der bisherigen Diskussion hat das Magnetfeld nur implizit eine Rolle gespielt, es hat zur Reflexion in der Turbulenz dienen müssen. Es bringt aber eine zusätzliche Schwierigkeit in das Problem. Wir haben soweit angenommen, dass sich die Teilchen frei von einer Seite des Schocks zur anderen bewegen können. dies gilt natürlich nur für schocks ohne mangetfeld, oder für parallele Schocks, bei denen die Teilchen entlang den Feldlinien fließen können. Für senkrechte Schocks wird diese Beweglichkeit der Teilchen aber ernsthaft in frage gestellt, und wir müssen die Teilchen quer zum Magnetfeld diffundieren lassen. Man kann zeigen, dass auch Berücksichtigung dieser Effekte am Potenzgesetz des Spektrums nichts ändert *Jones* (1994).

Nun kombinieren wir alle nötigen Zutaten für den Exponenten des Spektrums, Γ , gemäß Gleichung 5.95

$$\begin{aligned} \Gamma(N) &= \frac{4u_d \sum_{i=1}^N \frac{1}{v_i}}{\frac{4}{3}(u_u - u_d) \sum_{i=1}^N \frac{1}{v_i}} \\ &= \frac{3u_d}{u_u - u_d} = \frac{3}{r-1} \end{aligned} \quad (5.109)$$

wo $r \doteq u_u/u_d$. Wir sehen, dass zwar weder der inkrementelle Impulsge-
winn, noch die Reflexionswahrscheinlichkeit selber von N oder p un-
abhängig sind, der Exponent Γ dies
aber sehr wohl ist. Weil für nicht-

5.5.4 Schock-Drift Beschleunigung

Bei jedem Durchgang durch den Schock spürt das Teilchen ein induziertes elektrisches Feld das durch den Geschwindigkeitsunterschied beidseits des Schocks zustande kommt. Sind die assoziierten Felder \vec{B} und $\vec{v} \times \vec{B}$ während manchen Gyoradien des Teilchens homogen, wird diese Beschleunigung oft auch "scatter-free acceleration" genannt. Die Methode zur Berechnung der Teilchenenergie in diesem Beschleunigungsmechanismus ist selber stochastisch, man integriert für viele Teilchen ihre Trajektorien.

Der Name in der Überschrift kommt daher, dass die Teilchen eine Energie gewinnen, welche durch das Produkt ihrer Ladung, des induzierten elektrischen Feldes, und der Länge ihrer Driftstrecke im Schock, Δr , gegeben ist.

In schnellen magnetosonischen quasi-senkrechten Schocks (eine Mehrzahl der interplanetaren Schocks) erfahren die Teilchen Driftbewegungen im Schocksystem. Ihre Bewegung ist durch zwei Komponenten gegeben, der ∇B -Drift, und der B -Krümmungsdrift. In schnellen Schocks ist die ∇B Drift parallel zu $q\vec{E}$, und die Krümmungsdrift entgegengesetzt. Für die meisten Teilchen überwiegt in fast senkrechten Schocks der ∇B Driftterm, und die Teilchen gewinnen Energie. Die Schockbeschleunigung wird wieder wesentlich effizienter, wenn der Schock mehrmals passiert werden kann, und die Turbulenz im umgebenden Medium spielt wieder die wichtige Rolle, die sie auch für die diffusive Schockbeschleunigung hatte.

In langsamen Schocks geht der Gradient in die andere Richtung und der Krümmungsdrift ist parallel zum elektrischen Feld.

Nicht alle Teilchen werden gleich effizient in den Beschleunigungsprozess eingespielen. In diesem Prozess werden besonders jene Teilchen effizient beschleunigt, welche eine Geschwindigkeit parallel zur Schockgeschwindigkeit $V_s = V \tan \theta_{Bn}$ haben, die auch im Betrag etwa gleich groß ist. Dies ist insbesondere für Pick-up Ionen der Fall, die dann durch Schock-Drift besonders effizient beschleunigt werden. Abbildung 5.32 illustriert das bisher gesagte.

Das Spektrum der beschleunigten Teilchen kann nicht einfach hergeleitet werden, sondern muss auch wieder durch detaillierte Berechnung einzelner Trajektorien berechnet werden. Dabei spielen der Anfangspitchwinkel und die Anfangsgeschwindigkeit eine große Rolle. Nach diesen Rechnungen müssen die einzelnen Trajektorien, bzw. die resultierende Energie mit einer Anfangsverteilung im Pitchwinkel und Energie gewichtet werden. Bei genügend hohen Energien ergibt sich wieder ein Potenzgesetz in der Geschwindigkeit, wie wir das nach dem Credo der Schockbeschleunigung erwarten würden.

5.5.5 Transportgleichung

Sind Teilchen einmal beschleunigt worden, muss ihr Transport bis an den Beobachtungsort beschrieben werden. Dies geschieht durch die Transportgleichung, die aus der Boltzmann-Gleichung hergeleitet werden muss. Sie beschreibt die Entwicklung der Verteilungsfunktion $f(\vec{x}, \vec{v}, t)$ unter Berücksichtigung von

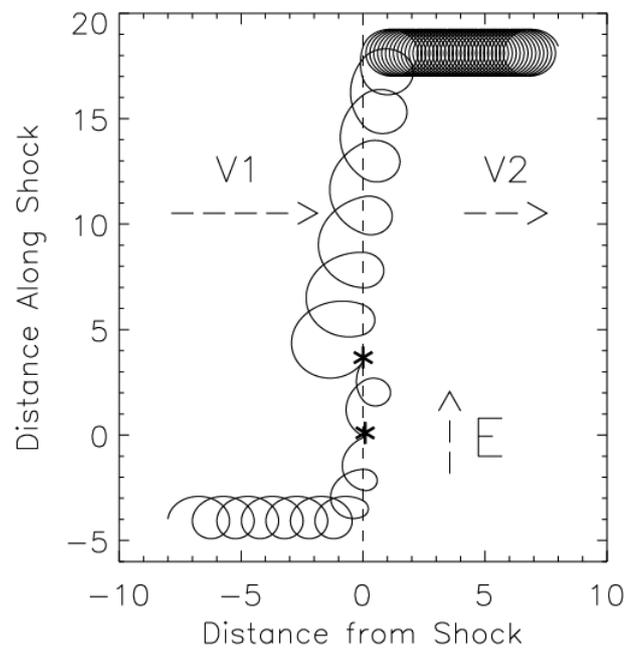


Abbildung 5.32: Schock-Drift Beschleunigung eines einzelnen Teilchens, das vom Schock eingeholt worden ist. Das Teilchen gewinnt im elektrischen Feld Energie und wandert nach unten, entlang des elektrischen Feldes. Aus *Jokipii* (2001)

Impuls- und Energieerhaltung. Sie lautet (ohne Herleitung, die in einer weiterführenden Vorlesung gegeben wird)

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \vec{u} \cdot \vec{\nabla} f = \vec{\nabla} \cdot (\kappa \vec{\nabla} f) + \frac{1}{3} (\vec{\nabla} \cdot \vec{u}) p \frac{\partial f}{\partial p} + \frac{1}{p_i^2} \frac{\partial}{\partial p_i} \left(p_j^2 D_{ij} \frac{\partial f}{\partial p_j} \right) + Q - V, \quad (5.110)$$

wo Q und V Quell- und Verlustterme sind. Dabei haben die einzelnen Terme die folgende Bedeutung. Die linke Seite ist die substantielle Ableitung, also eine Summe von zeitlicher und räumlicher (durch Advektion) Änderung. Der erste Term auf der rechten Seite ist ein räumlicher Diffusionsterm, der zweite beschreibt die adiabatische Expansion oder Kompression am Schock und der folgende Diffusion im Impulsraum.

Wir haben bisher nur diskutiert, wie die Teilchenpopulation genau am Schock aussieht. In etwas Entfernung vom Schock haben die Teilchen schon etwas Energie verloren, weil sie "gegen die Turbulenz ankämpfen müssen", und ihr Spektrum sieht nicht mehr aus, wie ein Potenzgesetz. Die Form wird durch eine Transportgleichung beschrieben,

$$V_i \frac{\partial f_i}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x} (\kappa(x, p)) \frac{\partial f_i}{\partial p} = 0, \quad (5.111)$$

wo der Index i für upstream und downstream stehen kann. Mit geeigneten Randbedingungen kann dieses System von Gleichungen gelöst werden und man erhält das in Abb. 5.33 dargestellte Verhalten.

Abbildung 5.33: Verhalten von Teilchen in der Umgebung eines Schocks. Aus *Forman* und *Webb* (1985).

Kapitel 6

Planetare Magnetosphären

Fehlt z. Zt. noch.

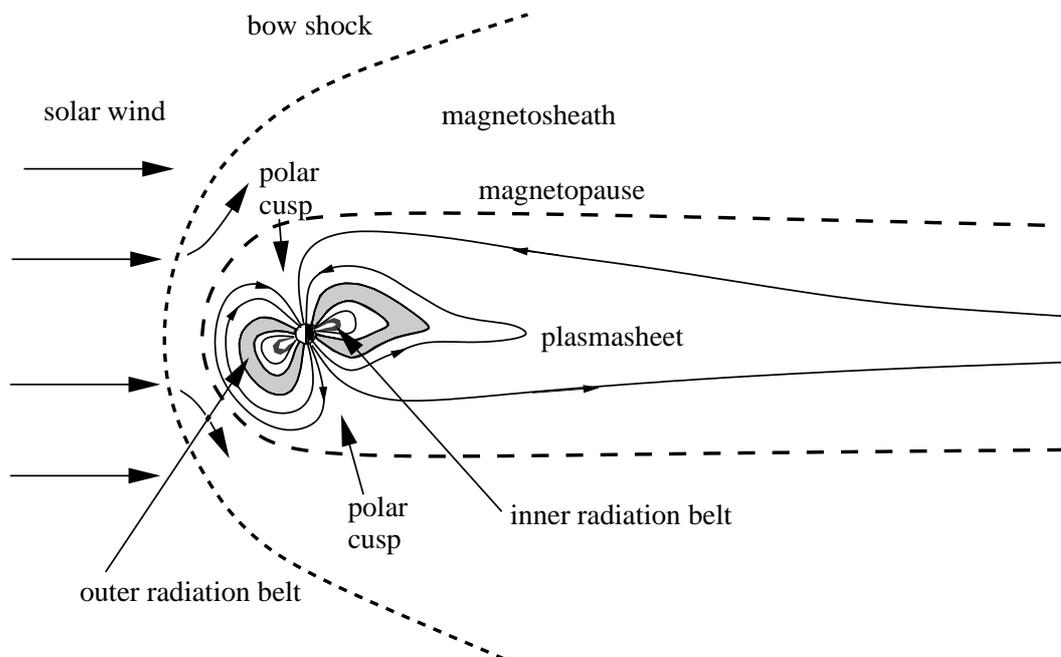


Abbildung 6.1: Die Magnetosphäre der Erde.

6.1 Entstehung von Magnetosphären

6.2 Struktur von Magnetosphären

6.3 Magnetosphärische Ströme

WW SW - irdischer Dipol
Abstand zum Bowshock

Verformung der MS
Induktion von Strömen, Induktionsgesetz der MHD
Das Stromsystem

6.4 Rekonnektion

Leitfähigkeit im Induktionsgesetz
Repetition eingefrorene Feldlinien
Felddiffusion
Petschek-Rekonnektion

6.5 Atmosphärische Verlustraten

Anhang A

Kinetische Physik

Grundlagen der kinetischen Physik

A.1 Die Verteilungsfunktion

Um das Verhalten eines Gases statistisch zu beschreiben, geht man von der Verteilungsfunktion $f(\vec{r}, \vec{v}, t)$ der Partikel in ihrem Phasenraum aus. Das Produkt $f d^3r d^3v$ ist die mittlere Anzahl Teilchen, welche sich im Phasenraumelement $d^3r d^3v$ befinden, deren Orts- und Impulskoordinaten sich also um \vec{r} und \vec{v} in den Intervallen d^3r und d^3v liegen¹. Damit ist die mittlere Teilchendichte in einem beliebigen Intervall d^3r um \vec{r} gegeben durch

$$n(\vec{r}, t) = \int d^3v f(\vec{v}, \vec{r}, t). \quad (\text{A.1})$$

Dabei definieren wir den Mittelungsprozess durch genau dieses Integral. Der Erwartungswert einer beliebigen, für das Gas relevanten Größe $W(\vec{r}, \vec{v}, t)$ ist gegeben durch das Integral

$$n(\vec{r}, t) W(\vec{r}, t) = \int d^3v f(\vec{v}, \vec{r}, t) W(\vec{r}, \vec{v}, t). \quad (\text{A.2})$$

Damit ist also der Erwartungswert für die Geschwindigkeit der Gasteilchen am Ort \vec{r} zur Zeit t

$$n(\vec{r}, t) \vec{u}(\vec{r}, t) = \int d^3v f(\vec{v}, \vec{r}, t) \vec{v}. \quad (\text{A.3})$$

A.2 Die Boltzmann-Gleichung

Wir betrachten im folgenden, wie sich f entlang einer Phasenraumtrajektorie verändert. Abbildung A.1 skizziert den Verlauf. Phasenraumelement Γ_1 wird auf Γ_2 abgebildet, dazwischen vergeht die Zeit $t = t_2 - t_1$. In dieser Zeit kann

¹Die Koordinaten brauchen nicht unbedingt Ort und Impuls zu sein, so sind z.B. zur Beschreibung eines mehratomigen Moleküls auch noch Drehimpuls und Schwingungen zu berücksichtigen.

sich die Verteilungsfunktion geändert haben, und zwar gemäß einer Kontinuitätsgleichung im Phasenraum. Die zeitliche Änderung der Anzahl Teilchen in einem Phasenraumelement Γ ist gleich dem Zu- oder Abfluss von oder in Γ ,

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Gamma} d\Gamma f = - \int_{\partial\Gamma} f \vec{S}_{\Gamma} f \dot{\Gamma} = - \int_{\Gamma} d\Gamma \vec{\nabla} (f \dot{\Gamma}), \quad (\text{A.4})$$

wobei die letzte Identität aus dem Satz von Stokes folgt. $\dot{\Gamma}$ kann als eine Geschwindigkeit im Phasenraum aufgefasst werden. In geläufigeren koordinaten lautet die Kontinuitätsgleichung also

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_i \left(\frac{\partial}{\partial v_i} (f \dot{v}_i) + \frac{\partial}{\partial r_i} (f \dot{r}_i) \right) = 0, \quad (\text{A.5})$$

und ausmultipliziert

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \sum_i \left(\dot{v}_i \frac{\partial f}{\partial v_i} + f \frac{\partial \dot{v}_i}{\partial v_i} + \dot{r}_i \frac{\partial f}{\partial r_i} + f \frac{\partial \dot{r}_i}{\partial r_i} \right) = 0. \quad (\text{A.6})$$

Wir können \dot{r}_i und \dot{v}_i in der Notation der Mechanik mittels der Hamilton-Funktion ausdrücken,

$$\dot{r}_i = \frac{\partial H}{\partial v_i}, \quad \text{und} \quad \dot{v}_i = - \frac{\partial H}{\partial r_i}, \quad (\text{A.7})$$

und sehen damit, dass

$$\frac{\partial \dot{r}_i}{\partial r_i} = \frac{\partial^2 H}{\partial r_i \partial v_i} = - \frac{\partial \dot{v}_i}{\partial v_i}. \quad (\text{A.8})$$

Deshalb verschwinden in Glg. A.6 der zweite und der vierte Term in der Klammer und es bleibt eine Gleichung übrig, welche besagt, dass das Gas im *Phasenraum inkompressibel* ist,

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \sum_i \left(\dot{v}_i \frac{\partial f}{\partial v_i} + \dot{r}_i \frac{\partial f}{\partial r_i} \right) = 0, \quad (\text{A.9})$$

der *Satz von Liouville*. Dieser Sachverhalt ist in Abb. A.1 illustriert. Die Fläche der Phasenraumvolumina Γ_1 und Γ_2 sind gleich, auch wenn sich ihre Form geändert hat.

Wir untersuchen nun, wie sich das Gas verhält, wenn Stöße erlaubt sind. Wir definieren als Stoß einen Vorgang, welcher, unter Einhaltung der Erhaltungssätze der Physik, Teilchen aus einem Phasenraumelement Γ herausstreuen und auch hineinstreuen kann. Wenn immer gleich viele Teilchen aus Γ herausgestreut werden, wie auch wieder hineingestreu werden, so befindet sich das System im Gleichgewicht und der Satz von Liouville ist nach wie vor gültig. Befindet sich das System nicht im Gleichgewicht, so tritt auf der rechten Seite von Glg. A.5 nicht 0 auf, sondern ein Quellterm, welcher besagt, wieviele Teilchen netto in Γ hinein oder hinaus gestreut werden, wie sich f entlang der Phasenraumtrajektorie verhält. Dieser Term heißt *Stoßintegral* und muss

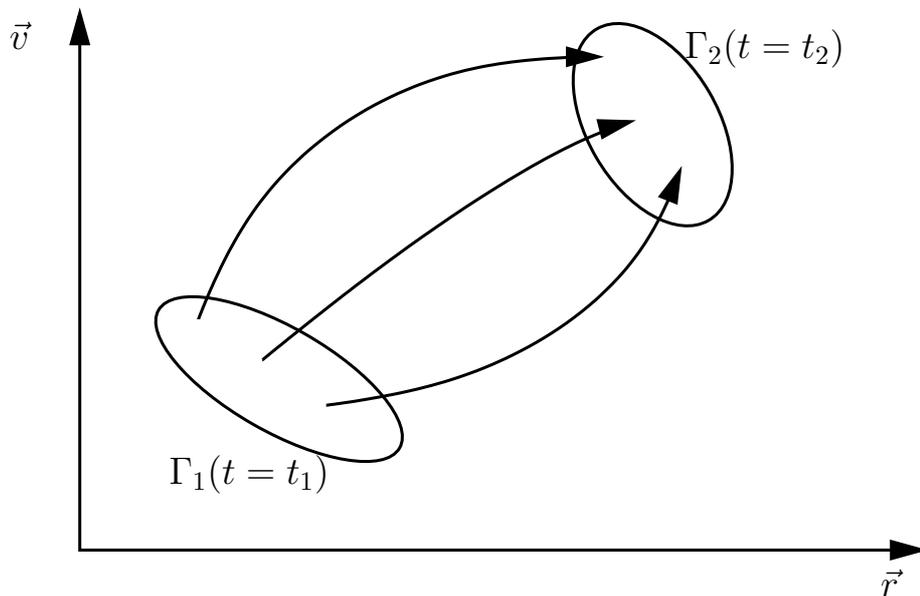


Abbildung A.1: Der Satz von Liouville. Ein Gas ist im Phasenraum inkompressibel. Die Fläche der Phasenraumvolumina Γ_1 und Γ_2 sind gleich, auch wenn sich ihre Form, ihr Ort und ihre Orientierung geändert haben.

genauer festgelegt werden, um das Verhalten des Systems zu definieren. Dies ist nicht immer einfach, und oft wird allgemein geschrieben

$$\left(\frac{\partial f(\vec{r}, \vec{v}, t)}{\partial t} \right)_{\text{coll}} = \frac{\partial f(\vec{r}, \vec{v}, t)}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) f(\vec{r}, \vec{v}, t) + (\vec{a} \cdot \vec{\nabla}_v) f(\vec{r}, \vec{v}, t), \quad (\text{A.10})$$

wobei $\left(\frac{\partial f(\vec{r}, \vec{v}, t)}{\partial t} \right)_{\text{coll}}$ das Stoßintegral bedeutet. Gleichungen dieser Form werden allgemein als kinetische Gleichungen bezeichnet. Gleichung A.10 heißt *Boltzmann-Gleichung* und bestimmt das Verhalten von Ensembles von Teilchen. Dabei spielt es in dieser Form keine Rolle, ob es sich bei den Teilchen um Moleküle, Ansammlungen von Molekülen, Staubpartikel, Sandkörner, Tennisbälle, Asteroiden, Planeten, Sterne oder gar Galaxien handelt.

A.3 Das Stoßintegral

Um ein System beschreiben zu können, muss das Stoßintegral bekannt sein, wir suchen also einen Ausdruck, der das Stoßintegral mit einer bekannten Größe der Systemkonstituenten in Verbindung bringt. Es ist naheliegend, dass wir das Stoßintegral durch den Streu- oder Wirkungsquerschnitt ausdrücken wollen, weil dieser ja exakt das Phänomen der Streuung beschreibt.

$$\left(\frac{\partial f(\vec{r}, \vec{v}, t)}{\partial t} \right)_{\text{coll}} = \text{Funktion von } d\sigma. \quad (\text{A.11})$$

Um einen Stoß zweier Teilchen zu beschreiben, führen wir die Notation $(\Gamma, \Gamma_1 \rightarrow \Gamma', \Gamma'_1)$ ein. Dabei haben die beiden Stoßpartner Anfangsbedingungen in den Phasenraumelementen Γ und Γ_1 und enden nach dem Stoß in den Phasenraumelementen Γ' und Γ'_1 . Wir bezeichnen mit $w(\Gamma, \Gamma_1 \rightarrow \Gamma', \Gamma'_1)$ die Wahrscheinlichkeit für diesen Prozess. Wir können nun angeben, wieviele Stöße in einer gewissen Zeit in einem Volumen dV den Übergang $(\Gamma, \Gamma_1 \rightarrow \Gamma', \Gamma'_1)$ machen,

$$dV d\Gamma \int d\Gamma_1 d\Gamma' d\Gamma'_1 w(\Gamma, \Gamma_1 \rightarrow \Gamma', \Gamma'_1) f f_1. \quad (\text{A.12})$$

Ähnlich ereignen sich auch Stöße durch die sich anschließend mehr Teilchen innerhalb des Intervalles $d\Gamma$ befinden,

$$dV d\Gamma \int d\Gamma_1 d\Gamma' d\Gamma'_1 w(\Gamma', \Gamma'_1 \rightarrow \Gamma, \Gamma_1) f' f'_1. \quad (\text{A.13})$$

Als Nettoergebnis erhalten wir

$$dV d\Gamma \int d\Gamma_1 d\Gamma' d\Gamma'_1 (w' f' f'_1 - w f f_1), \quad (\text{A.14})$$

wobei wir $w = w(\Gamma, \Gamma_1 \rightarrow \Gamma', \Gamma'_1)$ und $w' = w(\Gamma', \Gamma'_1 \rightarrow \Gamma, \Gamma_1)$ abgekürzt haben. Die mittlere Anzahl Teilchen, welche pro Volumen- und Zeit einheit in oder aus $d\Gamma$ hinein- oder hinausgestreut werden ist natürlich genau das Stoßintegral, welches ja angibt, wie sich die Anzahl Teilchen in einem Phasenraumintervall $d\Gamma$ um Γ verändert. Es ist einleuchtend, dass die totale Wahrscheinlichkeit aller Stöße aus $d\Gamma$ heraus gleich Eins sein muss, wenn als Resultat des Stoßes das System auch wieder in $d\Gamma$ sein darf. Genauso muss die totale Wahrscheinlichkeit eines Stoßes aus beliebigen Anfangszuständen in $d\Gamma$ gleich Eins sein. Wir können in beiden Fällen den Stoß subtrahieren, bei dem sich nichts ändert, $(\Gamma, \Gamma_1 \rightarrow \Gamma, \Gamma_1)$, ohne die Identität der beiden Wahrscheinlichkeiten zu ändern. Damit haben wir

$$\int d\Gamma' d\Gamma'_1 w' = \int d\Gamma' d\Gamma'_1 w. \quad (\text{A.15})$$

Weil $f f_1$ nicht von $d\Gamma' d\Gamma'_1$ abhängig sind, können wir Glg. A.14 vereinfachen zu

$$\left(\frac{\partial f(\vec{r}, \vec{v}, t)}{\partial t} \right)_{\text{coll}} = \int d\Gamma_1 d\Gamma' d\Gamma'_1 w' (f' f'_1 - f f_1). \quad (\text{A.16})$$

Der Wirkungs- oder Streuquerschnitt $d\sigma$ wird definiert als

$$d\sigma \doteq \frac{w(\Gamma, \Gamma_1 \rightarrow \Gamma', \Gamma'_1)}{\vec{v} - \vec{v}_1} d\Gamma' d\Gamma'_1, \quad (\text{A.17})$$

und hat, wie erwartet, die Dimension einer Fläche. Damit kann die bei Glg. A.11 gestellte Aufgabe gelöst werden,

$$\left(\frac{\partial f(\vec{r}, \vec{v}, t)}{\partial t} \right)_{\text{coll}} = \int d\Gamma_1 (\vec{v} - \vec{v}_1) (f' f'_1 - f f_1) d\sigma. \quad (\text{A.18})$$

A.4 Momente der Boltzmanngleichung

Die Erhaltungssätze eines Systems lassen sich formal herleiten durch das Bilden von Momenten der Boltzmanngleichung. Wir bestimmen im Folgenden das nullte Moment der Boltzmanngleichung A.10 um die Kontinuitätsgleichung, bzw. die Erhaltung der Teilchenzahl herzuleiten. Dazu integrieren wir die Boltzmanngleichung über die Geschwindigkeit \vec{v}

$$\int d^3v \left(\frac{\partial f(\vec{r}, \vec{v}, t)}{\partial t} \right)_{\text{coll}} = \int d^3v \frac{\partial f(\vec{r}, \vec{v}, t)}{\partial t} + \int d^3v (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) f(\vec{r}, \vec{v}, t) + \int d^3v (\vec{a} \cdot \vec{\nabla}_v) f(\vec{r}, \vec{v}, t) \quad (\text{A.19})$$

Die Zeitableitung im Term auf der linken Seite lässt sich vor das Integral ziehen, welches nach Glg. A.1 ausgeführt werden kann. Weil Stöße die Anzahl Teilchen nicht verändern² ist $\partial n_{\text{coll}}/\partial t = 0$ und die linke Seite von Glg. A.19 verschwindet. Es bleibt also

$$0 = \frac{\partial n(\vec{r}, t)}{\partial t} + \int d^3v (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) f(\vec{r}, \vec{v}, t) + \int d^3v (\vec{a} \cdot \vec{\nabla}_v) f(\vec{r}, \vec{v}, t) \quad (\text{A.20})$$

übrig. Zur Lösung dieser Gleichung verwenden wir die Identität

$$\vec{\nabla} \cdot (f \vec{v}) = f \vec{\nabla} \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla} f \quad (\text{A.21})$$

und schreiben Glg. A.20 um,

$$0 = \frac{\partial n(\vec{r}, t)}{\partial t} + \vec{\nabla} \int d^3v \vec{v} f(\vec{r}, \vec{v}, t) - \int d^3v f(\vec{r}, \vec{v}, t) \vec{\nabla} \cdot \vec{v} + \int d^3v \vec{\nabla}_v (\vec{a} f(\vec{r}, \vec{v}, t)) - \int d^3v f(\vec{r}, \vec{v}, t) \vec{\nabla}_v \vec{a}. \quad (\text{A.22})$$

Der zweite Term auf der rechten Seite ist gleich $\vec{\nabla} \cdot (n(\vec{r}, t) \vec{u}(\vec{r}, t))$. Der dritte und der fünfte, letzte Term heben sich gegenseitig auf, wie wir in Glg. A.8 gezeigt haben. Der letzte Term verschwindet ebenfalls für alle Kräfte, welche geschwindigkeitsunabhängig sind, ebenso für die Lorentzkraft. Der dritte Term verschwindet auch, weil wir eine unabhängige Variable differenzieren. Der zweitletzte Term kann mit dem Satz von Stokes auf ein Oberflächenintegral zurückgeführt werden,

$$\int d^3v \vec{\nabla}_v (\vec{a} f(\vec{r}, \vec{v}, t)) = \int_{\partial V} d\vec{S}_v \vec{a} f(\vec{r}, \vec{v}, t), \quad (\text{A.23})$$

welches verschwindet, weil die Verteilungsfunktion f für große \vec{v} schneller gegen Null geht, als jede Potenz von \vec{v} . Das Integral auf der rechten Seite von Glg. A.23 erstreckt sich ja über den Rand des Geschwindigkeitsraumes d^3v . Somit bleibt von der ersten Momentgleichung nur noch die Kontinuitätsgleichung übrig,

$$\frac{\partial n(\vec{r}, t)}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (n \vec{u}(\vec{r}, t)) = 0. \quad (\text{A.24})$$

²Jedenfalls nicht in der nicht-relativistischen Näherung, welche wir hier annehmen.

Wir betrachten nun das erste Moment der Boltzmann-Gleichung,

$$\int d^3v \left(\frac{\partial f(\vec{r}, \vec{v}, t)}{\partial t} \right)_{\text{coll}} \vec{v} = \int d^3v \frac{\partial f(\vec{r}, \vec{v}, t)}{\partial t} \vec{v} + \int d^3v (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) f(\vec{r}, \vec{v}, t) \vec{v} \\ + \int d^3v (\vec{a} \cdot \vec{\nabla}_v) f(\vec{r}, \vec{v}, t) \vec{v}. \quad (\text{A.25})$$

Wir versuchen wieder, die Differentialoperatoren vor die Integrale zu ziehen, bzw. auf den gesamten Integranden wirken zu lassen, indem wir schreiben

$$\int d^3v \left(\frac{\partial f(\vec{r}, \vec{v}, t)}{\partial t} \right)_{\text{coll}} \vec{v} = \frac{\partial}{\partial t} \int d^3v f(\vec{r}, \vec{v}, t) \vec{v} - \int d^3v f(\vec{r}, \vec{v}, t) \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \\ + \int d^3v \vec{\nabla} (f(\vec{r}, \vec{v}, t) \vec{v} \vec{v}) - 2 \int d^3v f(\vec{r}, \vec{v}, t) \vec{v} (\vec{\nabla} \cdot \vec{v}) \\ + \int d^3v \vec{\nabla}_v (f(\vec{r}, \vec{v}, t) \vec{a} \vec{v}) - \int d^3v f(\vec{r}, \vec{v}, t) \vec{\nabla}_v \vec{v} \vec{a} \\ - \int d^3v f(\vec{r}, \vec{v}, t) \vec{v} \vec{\nabla}_v \vec{a}. \quad (\text{A.26})$$

Wie bereits besprochen verschwindet der vierte Term der rechten Seite weil $\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0$, der fünfte Term kann wieder in ein Oberflächenintegral überführt werden, und der letzte Term verschwindet ebenfalls. Der zweite Term enthält eine zeitliche Ableitung einer unabhängigen Variable und verschwindet ebenfalls. Es verbleibt

$$\int d^3v \left(\frac{\partial f(\vec{r}, \vec{v}, t)}{\partial t} \right)_{\text{coll}} \vec{v} = \frac{\partial}{\partial t} (n \vec{u}(\vec{r}, t)) + \vec{\nabla} (n \langle \vec{v}(\vec{r}, t) \vec{v}(\vec{r}, t) \rangle) - \frac{n}{m} \vec{F}, \quad (\text{A.27})$$

wobei \vec{F} die Summe aller Kräfte, welche auf das Gas wirken, bedeutet und m die Masse der Teilchen. Gleichung A.27 heißt Impuls- oder Bewegungsgleichung. Zu beachten ist das Auftreten eines nicht-linearen Terms, $\vec{\nabla} (n \langle \vec{u}(\vec{r}, t) \vec{u}(\vec{r}, t) \rangle)$ in der Bewegungsgleichung.

Wir bilden nun das zweite Moment der Boltzmann-Gleichung und multiplizieren es mit $m/2$,

$$\frac{m}{2} \int d^3v \left(\frac{\partial f(\vec{r}, \vec{v}, t)}{\partial t} \right)_{\text{coll}} \vec{v} \vec{v} = \frac{m}{2} \int d^3v \frac{\partial f(\vec{r}, \vec{v}, t)}{\partial t} \vec{v} \vec{v} \\ + \frac{m}{2} \int d^3v (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) f(\vec{r}, \vec{v}, t) \vec{v} \vec{v} \\ + \frac{m}{2} \int d^3v (\vec{a} \cdot \vec{\nabla}_v) f(\vec{r}, \vec{v}, t) \vec{v} \vec{v}. \quad (\text{A.28})$$

Unter Anwendung der nun bekannten Tricks erhalten wir

$$\frac{m}{2} \int d^3v \left(\frac{\partial f(\vec{r}, \vec{v}, t)}{\partial t} \right)_{\text{coll}} \vec{v} \vec{v} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{m}{2} n(\vec{r}, t) \langle v^2 \rangle \right) \\ + \vec{\nabla} \cdot \left(\frac{m}{2} n(\vec{r}, t) \langle v^2 \vec{u}(\vec{r}, t) \rangle \right) \\ - n(\vec{r}, t) \vec{u}(\vec{r}, t) \vec{F}. \quad (\text{A.29})$$

Oft ist es einfacher, die Momente anders zu definieren und auszuführen. Mit dem Erwartungswert für die Geschwindigkeit lässt sich der thermische oder unkorrelierte Anteil isolieren,

$$\vec{c}(\vec{r}, t) \doteq \vec{v} - \vec{u}(\vec{r}, t). \quad (\text{A.30})$$

Weil $\vec{u}(\vec{r}, t)$ von Ort und Zeit abhängig ist, ist es nun auch $\vec{c}(\vec{r}, t)$, \vec{v} hingegen ist nicht eine abhängige Größe, wie auch \vec{r} und t . Nach dieser Definition ist klar, dass das erste Moment mit dieser Variable verschwinden muss,

$$\langle \vec{c} \rangle = \int d^3c \vec{c} f(\vec{r}, \vec{c}, t) = n \vec{u} - \vec{u} n = 0. \quad (\text{A.31})$$

Wir wollen nun die Boltzmann-Gleichung in der neuen Variable \vec{c} schreiben und müssen beachten, dass die Abhängigkeit von \vec{c} von \vec{r} und t einige zusätzliche Terme hervorrufen wird. Wir stellen bereit:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f(\vec{r}, \vec{v}, t)}{\partial t} &\longrightarrow \frac{\partial f(\vec{r}, \vec{c}, t)}{\partial t} + \vec{\nabla}_c f(\vec{r}, \vec{c}, t) \frac{\partial \vec{c}(\vec{r}, t)}{\partial t} \\ &= \frac{\partial f(\vec{r}, \vec{c}, t)}{\partial t} - \vec{\nabla}_c f(\vec{r}, \vec{c}, t) \frac{\partial \vec{u}(\vec{r}, t)}{\partial t}, \end{aligned} \quad (\text{A.32})$$

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} f(\vec{r}, \vec{v}, t) &\longrightarrow \vec{\nabla} f(\vec{r}, \vec{c}, t) + \vec{\nabla}_c f(\vec{r}, \vec{c}, t) \vec{\nabla} \vec{c}(\vec{r}, t) \\ &= \vec{\nabla} f(\vec{r}, \vec{c}, t) - \vec{\nabla}_c f(\vec{r}, \vec{c}, t) \vec{\nabla} \vec{u}(\vec{r}, t), \end{aligned} \quad (\text{A.33})$$

$$\vec{\nabla}_v f(\vec{r}, \vec{v}, t) \longrightarrow \vec{\nabla}_c f(\vec{r}, \vec{v}, t), \quad (\text{A.34})$$

wobei die Ausdrücke nach den Gleichheitszeichen aus $\vec{\nabla}_u \vec{c} = -1$ folgen. Wir schreiben nun die Boltzmann-Gleichung in der neuen Variable und lassen die Argumente der Funktionen weg, um die Ausdrücke übersichtlicher zu gestalten.

$$\left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)'_{\text{coll}} = \frac{\partial f}{\partial t} + ((\vec{u} + \vec{c}) \cdot \vec{\nabla}) f - \left[\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} + \vec{c}) \vec{\nabla} \vec{u} - \vec{a} \right] \vec{\nabla}_c f, \quad (\text{A.35})$$

wobei der Strich beim Stoßintegral andeutet, dass die Ableitungen gemäß Glg. A.32 auszuführen sind. Wir haben damit die Boltzmann-Gleichung in die neuen Koordinaten umgeschrieben und dabei die Abhängigkeiten von \vec{c} und \vec{u} berücksichtigt. Von hier an ist nun \vec{c} die unabhängige Variable, d.h. $\partial_t c = 0$ und $\vec{\nabla} \vec{c} = 0$. Der Erwartungswert einer beliebigen Größe $W(c)$ ist in den neuen Koordinaten ebenso einfach zu bestimmen,

$$n \langle W \rangle = \int d^3c W(c) f(\vec{r}, \vec{c}, t). \quad (\text{A.36})$$

Die Dynamik der Größe W wird bestimmt durch

$$\begin{aligned} \int d^3c W(c) \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)'_{\text{coll}} &= \int d^3c W(c) \frac{\partial f}{\partial t} + \int d^3c W(c) ((\vec{u} + \vec{c}) \cdot \vec{\nabla}) f - \\ &\int d^3c W(c) \left[\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} + \vec{c}) \vec{\nabla} \vec{u} - \vec{a} \right] \vec{\nabla}_c f. \end{aligned} \quad (\text{A.37})$$

Wir bearbeiten nun Term nach Term der rechten Seite.

$$\begin{aligned}\int d^3c W(c) \frac{\partial f}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t} \int d^3c W f - \int d^3c \frac{\partial W}{\partial t} f, \\ &= \frac{\partial}{\partial t} (n \langle W \rangle) - n \left\langle \frac{\partial W}{\partial t} \right\rangle\end{aligned}\quad (\text{A.38})$$

$$\begin{aligned}\int d^3c W(c) \vec{u} \vec{\nabla} f &= \vec{u} \left[\vec{\nabla} \int d^3c W f - \int d^3c f \vec{\nabla} W \right] \\ &= \vec{u} \left[\vec{\nabla} (n \langle W \rangle) - n \vec{\nabla} W \right],\end{aligned}\quad (\text{A.39})$$

$$\begin{aligned}\int d^3c W(c) \vec{c} \vec{\nabla} f &= \left[\vec{\nabla} \int d^3c W \vec{c} f - \int d^3c f \vec{c} \vec{\nabla} W \right] \\ &= \left[\vec{\nabla} (n \langle W \vec{c} \rangle) - n \langle \vec{c} \cdot \vec{\nabla} W \rangle \right],\end{aligned}\quad (\text{A.40})$$

Die Terme, welche Geschwindigkeitsableitungen enthalten, führen wir wieder in Oberflächenintegrale über und erhalten,

$$\begin{aligned}\int d^3c W(c) \vec{\nabla}_c f &= \int d^3c \vec{\nabla}_c (W f) - \int d^3c f \vec{\nabla}_c W \\ &= -n \langle \vec{\nabla}_c W \rangle,\end{aligned}\quad (\text{A.41})$$

$$\begin{aligned}\int d^3c \vec{c} W(c) \vec{\nabla}_c f &= \int d^3c \vec{\nabla} (W \vec{c} f) - \int d^3c f \vec{c} \vec{\nabla} (\vec{c} W) \\ &= -n \langle \vec{\nabla}_c (\vec{c} W) \rangle.\end{aligned}\quad (\text{A.42})$$

Dabei muss beachtet werden, dass der letzte Term ein Tensor ist, in Komponentenschreibweise

$$\int d^3c \vec{c} W(c) \vec{\nabla}_c f = -n \left\langle c_j \frac{\partial W}{\partial c_i} \right\rangle - n \delta_{ij} \langle W \rangle, \quad (\text{A.43})$$

wo δ_{ij} das Kroneckersche Deltasymbol bedeutet, $\delta_{ij} = 1$ für $i = j$ und $\delta_{ij} = 0$ sonst. Der Term mit der Beschleunigung \vec{a}

$$\begin{aligned}\int d^3c W(c) \vec{a} \vec{\nabla}_c f &= \int d^3c \vec{\nabla}_c (W \vec{a} f) - \int d^3c f \vec{\nabla}_c (\vec{a} W), \\ &= - \int d^3c W f \vec{\nabla}_c \vec{a} - \int d^3c \vec{a} f \vec{\nabla}_c W, \\ &= -n \langle \vec{a} \vec{\nabla}_c W \rangle,\end{aligned}\quad (\text{A.44})$$

wo wir angenommen haben, dass die Beschleunigung im Geschwindigkeitsraum divergenzfrei ist,

$$\vec{\nabla}_v \vec{a} = \vec{\nabla}_c \vec{a} = 0, \quad (\text{A.45})$$

was für die meisten externen Kräfte wie Gravitation und elektromagnetische Kräfte gilt. Zusammengefasst lautet die Boltzmann-Gleichung nun

$$\begin{aligned}
\int d^3c W(c) \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)'_{\text{coll}} &= \frac{\partial}{\partial t} (n \langle W \rangle) - n \left\langle \frac{\partial W}{\partial t} \right\rangle + \\
&+ \vec{u} \left[\vec{\nabla} (n \langle W \rangle) - n \vec{\nabla} W \right] + \\
&+ \left[\vec{\nabla} (n \langle W \vec{c} \rangle) - n \langle \vec{c} \cdot \vec{\nabla} W \rangle \right] + \\
&+ n \langle \vec{\nabla}_c W \rangle \left[\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \vec{u} \vec{\nabla} \vec{u} \right] + \\
&+ n \vec{\nabla} \vec{u} \left[\langle \vec{c} \vec{\nabla}_c W \rangle + \vec{\nabla}_c \vec{c} \langle W \rangle \right] - \\
&- n \langle \vec{a} \vec{\nabla}_c W \rangle. \tag{A.46}
\end{aligned}$$

Wir bestimmen nun die Momente der Boltzmann-Gleichung indem wir $W = m$, $W = mc$ und $W = \frac{1}{2}mc^2$ setzen. Damit haben wir für $W = m$

$$m \int d^3c \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)'_{\text{coll}} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} (\rho \vec{u}), \tag{A.47}$$

weil die meisten Terme wegen $\langle \vec{c} \rangle = 0$, $\vec{\nabla} m = 0$ und $\partial m / \partial t = 0$ verschwinden. Für ein verschwindendes Stoßintegral sagt diese Gleichung nichts anderes, als dass die Masse erhalten bleibt. Sie heißt also Massenerhaltungsgleichung, oder Kontinuitätsgleichung. Für $W = mc$

$$m \int d^3c \vec{c} \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)'_{\text{coll}} = \rho \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \rho \vec{u} \vec{\nabla} \vec{u} + \vec{\nabla} (\rho \langle \vec{c} \vec{c} \rangle) - \rho \langle \vec{a} \rangle. \tag{A.48}$$

Für ein Gas im lokalen thermodynamischen Gleichgewicht (local thermodynamic equilibrium, LTE) kann der Term $\rho \langle \vec{c} \vec{c} \rangle$ ausgewertet werden zu $\rho \langle \vec{c} \vec{c} \rangle = P \delta_{ik}$, und damit wird Glg. A.48 zu

$$m \int d^3c \vec{c} \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)'_{\text{coll}} = \rho \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \rho \vec{u} \vec{\nabla} \vec{u} + \vec{\nabla} P - \rho \langle \vec{a} \rangle \tag{A.49}$$

und ist komponentenweise zu verstehen. Dies ist die Bewegungsgleichung und sagt uns, wie sich der Massefluss verhält. Eine weitere Gleichung, welche das Gas beschreibt, erhalten wir, indem wir $W = 1/2mc^2$ setzen,

$$m \int d^3c c^2 \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)'_{\text{coll}} = \frac{3}{2} \frac{\partial P}{\partial t} + \frac{3}{2} \vec{\nabla} (\vec{u} P) + P \vec{\nabla} \cdot \vec{u} - \rho \langle \vec{a} \vec{c} \rangle, \tag{A.50}$$

wobei wir wiederum LTE angenommen haben. Für die meisten externen Kräfte wie Gravitation und elektromagnetische Kräfte, verschwindet der Term $\langle \vec{a} \vec{c} \rangle$ und es bleibt

$$m \int d^3c c^2 \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)'_{\text{coll}} = \frac{3}{2} \frac{\partial P}{\partial t} + \frac{3}{2} \vec{\nabla} (\vec{u} P) + P \vec{\nabla} \cdot \vec{u}. \tag{A.51}$$

Diese Gleichung bestimmt, wie sich der Impulsfluss verhält, bzw. bestimmt das Verhalten der inneren Energie des Systems.

Bevor wir rein mechanisch ansetzen, das nächste Moment der Boltzmann-Gleichung zu berechnen, wollen wir kurz innehalten und uns überlegen, was uns die Struktur der erhaltenen Gleichungen sagt. Gleichungen A.47, A.49 und A.51 bilden zusammen, wieder für verschwindende Stoßintegrale, die sogenannten Eulergleichungen. Sie drücken aus, wie sich Massendichte verhält, wie sich der Massenfluss oder Impuls verhält und wie sich der Impulsfluss verhält. Dabei wird jeweils das zeitliche Verhalten der Größe W durch eine räumliche Divergenz des nächsthöheren Moments der Größe ausgedrückt. In Glg. A.47 wird $\partial\rho/\partial t$ durch die Divergenz von $\rho\vec{u}$ ausgedrückt. Das zeitliche Verhalten von $\rho\vec{u}$ wird in Glg. A.49 durch die Divergenz von $\rho\vec{u}\vec{u}$ ausgedrückt. Diese Struktur setzt sich fort und wir müssten unendlich lange Momente bilden, was ja nun auch nicht ganz der Sinn der Sache ist. Irgendwo muss dieser unendliche Prozess abgeklemmt werden durch eine physikalisch motivierte Annahme, welche das System von Gleichungen (hier 5) schließt indem eine Größe höherer Ordnung in den Momenten durch eine Größe niedrigerer Ordnung ausgedrückt wird. Dies kann z.B. durch einen Polytropenansatz

$$P = P_0 \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^\alpha, \quad \alpha = \text{const.} \quad (\text{A.52})$$

erreicht werden. Dieser Ansatz eliminiert Glg. A.51 und, in Unterkapitel 3.5.3 Glg. 3.108. Andere Möglichkeiten bestehen darin, die Form der Verteilungsfunktion f vorzuschreiben, ein Verfahren, welches Chapman *Chapman* (1916) und Enskog *Enskog* (1917) angewandt haben, um diese Problem zu umgehen.

A.5 Die Vlasov-Gleichung

A.6 Kinetische Behandlung von Wellen in Plasmen

A.6.1 Landaudämpfung

Anhang B

Grundlagen der Magnetohydrodynamik

Wegen der wesentlich verschiedenen Massen von Proton und Elektron ist es im Allgemeinen nötig, ein Plasma durch einen duplizierten Satz von Gleichungen zu beschreiben, ein Satz für die Protonen, ein Satz für die Elektronen. Verhält sich das Plasma wie eine Flüssigkeit, d.h. wie ein global elektrisch neutrales Gas, ist es naheliegend, die Methoden der Hydrodynamik anwenden zu wollen. Dies kann erreicht werden wenn das System trotz gewisser, im folgenden besprochenen, Näherungen adäquat beschrieben wird. Dabei werden z.B. die Geschwindigkeiten \vec{u}_i und \vec{u}_e der Ionen und Elektronen nicht mehr separat behandelt, sondern wir versetzen uns in ein Bezugssystem, in dem nur noch die Differenz, $\vec{u}_i - \vec{u}_e$ erscheint. Dies ist das Bezugssystem, in welchem das Plasma elektrisch neutral erscheint. Dies kann erreicht werden, wenn die im Plasma auftretenden Frequenzen klein sind im Vergleich zur Zyklotronfrequenz und zur Plasmafrequenz. Dies bedeutet, dass der Verschiebungsstrom \vec{E} vernachlässigt werden kann. Ferner setzen wir voraus, dass das System groß ist im Vergleich zu den für das System typischen Skalen wie Debye-Radius oder mittlere freie Weglänge. Unter gewissen Umständen, welche für die Anwendungen in extraterrestrischer Physik wichtig sind, kann das System auch ähnliche Größen aufweisen, wie die mittlere freie Weglänge. Ferner sollen die Bewegungen im Plasma deutlich nicht-relativistisch sein, so dass $|\vec{u}| \ll c$.

B.1 Herleitung der Grundgleichungen

Wir betrachten die im Anhang A hergeleitete Bewegungsgleichung für Ionen (Subskript i) und Elektronen (Subskript e). Für Ionen lautet sie

$$n_i m_i \frac{\partial \vec{u}_i}{\partial t} = -n_i m_i \vec{u}_i \vec{\nabla} \vec{u}_i - \vec{\nabla} P_i + n_i m_i \langle \vec{a}_i \rangle + \vec{C}_{ie}, \quad (\text{B.1})$$

und für die Elektronen

$$n_e m_e \frac{\partial \vec{u}_e}{\partial t} = -n_e m_e \vec{u}_e \vec{\nabla} \vec{u}_e - \vec{\nabla} P_e + n_e m_e \langle \vec{a}_e \rangle + \vec{C}_{ei}, \quad (\text{B.2})$$

wobei wir das erste Moment des Stoßintegrals abgekürzt haben,

$$\vec{C}_{ie} \doteq m \int d^3c \vec{c} \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)'_{\text{coll}}. \quad (\text{B.3})$$

C_{ie} gibt an, wieviel Impuls die Ionen durch Stöße mit Elektronen gewinnen. Der komplementäre Term, C_{ei} gibt an, wieviel Impuls die Elektronen durch Stöße mit Ionen gewinnen und selbstverständlich muss gelten

$$-\vec{C}_{ie} = \vec{C}_{ei} \doteq \vec{C}. \quad (\text{B.4})$$

Die beiden Gleichungen B.1 und B.2 sind nur durch das Stoßintegral miteinander gekoppelt. Wir können C abschätzen indem wir die Abhängigkeit von verschiedenen Größen untersuchen. Weil \vec{C} ja Coulombstöße beschreibt, muss \vec{C} proportional zu n_i und n_e sowie zu q_i und q_e sein. Außerdem muss \vec{C}_{ie} proportional zur Geschwindigkeitsdifferenz $\vec{u}_i - \vec{u}_e$ sein (und \vec{C}_{ei} zu $\vec{u}_e - \vec{u}_i$),

$$\vec{C}_{ei} = \eta q_e q_i n_e n_i (\vec{u}_i - \vec{u}_e). \quad (\text{B.5})$$

Wir addieren nun die beiden Gleichungen B.1 und B.2 und erhalten

$$\begin{aligned} n_i m_i \frac{\partial \vec{u}_i}{\partial t} + {}_e m_e \frac{\partial \vec{u}_e}{\partial t} &= -n_i m_i \vec{u}_i \vec{\nabla} \vec{u}_i - n_e m_e \vec{u}_e \vec{\nabla} \vec{u}_e \\ &\quad - \vec{\nabla} P_i - \vec{\nabla} P_e + n_i m_i \langle \vec{a}_i \rangle + n_e m_e \langle \vec{a}_e \rangle \end{aligned} \quad (\text{B.6})$$

Wir vernachlässigen den nicht-linearen Term ($\vec{u} \vec{\nabla} \vec{u}$) weil er klein ist gegenüber den anderen (Nach Voraussetzung ist $u \ll c$). Das Stoßintegral ist nach Glg. B.4 verschwunden. Wir setzen nun die Beschleunigung \vec{a} explizit ein,

$$\vec{a} = \frac{q}{m} (\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}), \quad (\text{B.7})$$

wo q und m jeweils die Protonen- bzw. die Elektronenmasse bedeuten soll. Mit $q_i = -q_e = e$ wird die Summe nun

$$n_i m_i \frac{\partial \vec{u}_i}{\partial t} + {}_e m_e \frac{\partial \vec{u}_e}{\partial t} = -\vec{\nabla} P + e (n_i \vec{u}_i - n_e \vec{u}_e) \times \vec{B}, \quad (\text{B.8})$$

wo wir mit $P \doteq P_i + P_e$ die Summe der Partialdrucke der Ionen und Elektronen meinen. Die Terme mit den elektrischen Feldern heben sich gegenseitig auf. Die in Klammern auftretende Größe k—urzen wir ab als

$$\vec{J} \doteq e (n_i \vec{u}_i - n_e \vec{u}_e). \quad (\text{B.9})$$

Sie hat die Dimension einer Stromdichte und ist gleich der im Plasma fließenden Stromdichte, die es zur Aufrechterhaltung der Neutralität braucht. Ferner führen wir die Massendichte ρ ,

$$\rho \doteq m_i n_i + m_e n_e \quad (\text{B.10})$$

und die makroskopische Geschwindigkeit des Plasmas ein,

$$\vec{u} \doteq \frac{n_i m_i \vec{u}_i + n_e m_e \vec{u}_e}{n_i m_i + n_e m_e} = \frac{n_i m_i \vec{u}_i + n_e m_e \vec{u}_e}{\rho} \quad (\text{B.11})$$

und schreiben damit nun die Bewegungsgleichung in der MHD,

$$\rho \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} = \vec{J} \times \vec{B} - \nabla P. \quad (\text{B.12})$$

Wir wollen als nächstens die Impuls- oder Bewegungsgleichung der MHD herleiten. Weil wir das System als eine Flüssigkeit beschreiben wollen, müssen wir die vollständig andere Massenskala der beiden Bewegungsgleichungen korrigieren, indem wir Glg. B.1 mit m_e multiplizieren und Glg. B.2 mit m_i . Um eine andere Linearkombination der Geschwindigkeiten zu erhalten, subtrahieren wir die erhaltenen Gleichungen

$$\begin{aligned} n_i m_e m_i \frac{\partial \vec{u}_i}{\partial t} + n_e m_i m_e \frac{\partial \vec{u}_e}{\partial t} &= -m_e \vec{\nabla} P_i + m_i \vec{\nabla} P_e + m_e \vec{C}_{ie} + m_i \vec{C}_{ei} \\ &+ en_i m_e (\vec{E} + \vec{u}_i \times \vec{B}) + en_e m_i (\vec{E} + \vec{u}_e \times \vec{B}). \end{aligned} \quad (\text{B.13})$$

Wir setzen die bereits definierten Größen ein

$$\begin{aligned} \frac{m_i m_e}{e} \frac{\partial \vec{J}}{\partial t} &= e \rho \vec{E} - \eta n e (m_i + m_e) \vec{J} - m_e \vec{\nabla} P_i + m_i \vec{\nabla} P_e \\ &+ en (m_e \vec{u}_i + m_i \vec{u}_e) \times \vec{B}. \end{aligned} \quad (\text{B.14})$$

Der letzte Term kann vereinfacht, werden indem wir schreiben

$$\begin{aligned} m_e \vec{u}_i + m_i \vec{u}_e &= m_i \vec{u}_i + m_e \vec{u}_e + m_i (\vec{u}_e - \vec{u}_i) + m_e (\vec{u}_i - \vec{u}_e) \\ &= \frac{\rho}{n} \vec{u} - (m_i - m_e) \frac{\vec{J}}{ne}. \end{aligned} \quad (\text{B.15})$$

Wir teilen die entstehende Gleichung noch durch ρe und erhalten

$$\vec{E} + \vec{u} \times \vec{B} - \eta \vec{J} = \frac{1}{e \rho} \left\{ \frac{m_i m_e n}{e} \frac{\partial \vec{J}}{\partial t} + (m_i - m_e) \vec{J} \times \vec{B} + m_e \vec{\nabla} P_i - m_i \vec{\nabla} P_e \right\}. \quad (\text{B.16})$$

Die zeitliche Ableitung der Stromdichte muss klein sein, weil nach Voraussetzung alle Zeitskalen im Plasma länger sind, als die Plasmafrequenz, der Term kann darum vernachlässigt werden. Ferner können die Terme in denen nur die Elektronenmasse m_e vorkommt im Vergleich zu den Termen mit der Protonenmasse m_p ebenfalls vernachlässigt werden. Wir finden das sogenannte *verallgemeinerte Ohm'sche Gesetz*,

$$\vec{E} + \vec{u} \times \vec{B} = \eta \vec{J} + \frac{1}{en} (\vec{J} \times \vec{B} - \vec{\nabla} P_e). \quad (\text{B.17})$$

Es beschreibt die elektrischen Eigenschaften des Plasmas. Oft können der Term $\vec{J} \times \vec{B}$ und $\vec{\nabla} P_e$ vernachlässigt werden und es bleibt das bekannte Ohmsche Gesetz übrig

$$\vec{J} = \sigma (\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}), \quad (\text{B.18})$$

wo $\sigma \doteq 1/\eta$ die elektrische Leitfähigkeit bedeutet. Zusammen mit einer Kontinuitätsgleichung für die Massendichte ρ und die Ladungsdichte ξ und den Maxwellgleichungen haben wir nun alle Gleichungen der MHD.

Gleichungen der MHD:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{u}) = 0, \quad (\text{B.19})$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{u}) = 0, \quad (\text{B.20})$$

$$\vec{J} = \sigma (\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}), \quad (\text{B.21})$$

$$\rho \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} = \vec{J} \times \vec{B} - \nabla P, \quad (\text{B.22})$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\xi}{\varepsilon_0}, \quad (\text{B.23})$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} - \frac{1}{c^2} \dot{\vec{E}} = \mu_0 \vec{J}, \quad (\text{B.24})$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0, \quad (\text{B.25})$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} + \dot{\vec{B}} = 0. \quad (\text{B.26})$$

Bemerkung: Wenn der Verschiebungsstrom $\frac{1}{c^2} \dot{\vec{E}}$ vernachlässigt werden kann, so folgt aus Gleichung B.24 durch Bildung der Divergenz, dass

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{J} = 0. \quad (\text{B.27})$$

B.2 Vektoroperatoren in verschiedenen Koordinatensystemen

B.2.1 Kartesische Koordinaten: (x, y, z)

$$\vec{\nabla}\Psi = \frac{\partial\Psi}{\partial x}\hat{x} + \frac{\partial\Psi}{\partial y}\hat{y} + \frac{\partial\Psi}{\partial z}\hat{z} \quad (\text{B.28})$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \quad (\text{B.29})$$

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \times \vec{A} = & \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) \hat{x} + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \hat{y} + \\ & + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \hat{z} \end{aligned} \quad (\text{B.30})$$

$$\vec{\nabla}^2\Psi = \Delta\Psi = \frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\Psi}{\partial z^2} \quad (\text{B.31})$$

B.2.2 Zylindrische Koordinaten: (ρ, θ, z)

$$\vec{\nabla}\Psi = \frac{\partial\Psi}{\partial\rho}\hat{\rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial\Psi}{\partial\theta}\hat{\theta} + \frac{\partial\Psi}{\partial z}\hat{z} \quad (\text{B.32})$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial(\rho A_\rho)}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial A_\theta}{\partial\theta} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \quad (\text{B.33})$$

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \times \vec{A} = & \left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial A_z}{\partial\theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial z} \right) \hat{\rho} + \left(\frac{\partial A_\rho}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial\rho} \right) \hat{\theta} + \\ & + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho A_\theta) - \frac{\partial A_\rho}{\partial\theta} \right) \hat{z} \end{aligned} \quad (\text{B.34})$$

$$\vec{\nabla}^2\Psi = \Delta\Psi = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial\Psi}{\partial\rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2\Psi}{\partial\theta^2} + \frac{\partial^2\Psi}{\partial z^2} \quad (\text{B.35})$$

B.2.3 Sphärische Koordinaten (Kugelkoordinaten): (r, θ, ϕ)

$$\vec{\nabla}\Psi = \frac{\partial\Psi}{\partial r}\hat{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial\Psi}{\partial\theta}\hat{\theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\Psi}{\partial\phi}\hat{\phi} \quad (\text{B.36})$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 A_r) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta A_\theta) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_\phi}{\partial\phi} \quad (\text{B.37})$$

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \times \vec{A} = & \frac{1}{r\sin\theta} \left(\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta A_\phi) - \frac{\partial A_\theta}{\partial\phi} \right) \hat{r} + \left(\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_r}{\partial\phi} - \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r A_\phi) \right) \hat{\theta} + \\ & + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial}{\partial r}(r A_\theta) - \frac{\partial A_r}{\partial\theta} \right) \hat{\phi} \end{aligned} \quad (\text{B.38})$$

$$\vec{\nabla}^2\Psi = \Delta\Psi = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\Psi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\Psi}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial^2\Psi}{\partial\phi^2} \quad (\text{B.39})$$

Literaturverzeichnis

- Arnaud, M. und J. Raymond: “Iron ionization and recombination rates and ionization equilibrium”. *Astrophysical Journal*, **398**, (1992), 394–406.
- Arnaud, M. und R. Rothenflug: “An updated evaluation of recombination and ionization rates”. *Astron. Astrophys. Suppl. Ser.*, **60**, (1985), 425 – 457.
- Aschwanden, M.: *Physics of the Solar Corona, An Introduction*. Springer (2004).
- Avrett, E. H. und R. Loeser: “Models of the Solar Chromosphere and Transition Region from SUMER and HRTS Observations: Formation of the Extreme-Ultraviolet Spectrum of Hydrogen, Carbon, and Oxygen”. *Astrophysical Journal Supplement*, **175**, (2008), 229–276.
- Bame, S. J., J. R. Asbridge, W. C. Feldman, und J. T. Gosling: “Evidence for a structure-free state at high solar wind speeds”. *J. Geophys. Res.*, **82**, (1977), 1487 – 1492.
- Bame, S. J., B. E. Goldstein, J. T. Gosling, J. W. Harvey, D. J. McComas, M. Neugebauer, und J. L. Phillips: “Ulysses observations of a recurrent high speed solar wind stream and the heliomagnetic streamer belt”. *Geophys. Res. Lett.*, **20**, (1993), 2323 – 2326.
- Baring, M. G. und E. J. Summerlin: “Particle Acceleration at Interplanetary Shocks”. *ArXiv e-prints*, **807**.
- Bartels, J.: “Geomagnetic and solar data”. *J. Geophys. Res.*, **54**, (1949), 296 – 297.
- Baumjohann, W. und R. A. Treumann: *Basic Space Plasma Physics*. Imperial college Press (1997).
- Biermann, L.: “Kometenschweife und solare Korpuskularstrahlung”. *Z. Astrophys.*, **29**, (1951), 274 – 286.
- Biermann, L.: “Physical processes in comet tails and their relation to solar activity”. *Extrait des Mem. Soc. Roy. Sci. Liege Quatr. Ser.*, **13**, (1953), 291 – 302.

- Biermann, L.: "Solar corpuscular radiation and the interplanetary gas". *Observatory*, **77**, (1957), 109 – 110.
- Binney, J. und M. Merrifield: *Galactic Astronomy*. Princeton University Press, Princeton, New Jersey (1998).
- Birkeland, K.: "Sur les rayons cathodiques sous l'action de force magnétiques intenses". *Arch. des sci. naturelles*, **1**, (1896), 497 – 512.
- Birkeland, K.: *The Norwegian Aurora Polaris Expedition 1902–1903, vol. 1, On the Cause of Magnetic Storms and the Origin of Terrestrial Magnetism, first section*. H. Aschehoug and Co, Christiania (1908).
- Birkeland, K.: *The Norwegian Aurora Polaris Expedition 1902–1903, vol. 1, On the Cause of Magnetic Storms and the Origin of Terrestrial Magnetism, second section*. H. Aschehoug and Co, Christiania (1913).
- Blandford, R. D.: "Particle acceleration mechanisms". *Astrophys. J. Suppl. Ser.*, **90**, (1994), 515 – 520.
- Bonetti, A., H. S. Bridge, A. J. Lazarus, E. F. Rossi, und F. Scherb: "Explorer 10 plasma measurements". *J. Geophys. Res.*, **68**, (1963), 4017 – 4063.
- Borrini, G., J. M. Wilcox, J. T. Gosling, S. J. Bame, und W. C. Feldman: "Solar wind helium and hydrogen structure near the heliospheric current sheet: A signal of coronal streamers at 1 AU". *J. Geophys. Res.*, **86**, (1981), 4565 – 4573.
- Bullard, E.: "The stability of a homopolar dynamo". *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, **51**, (1955), 744–+.
- Chapman, S.: "On the kinetic theory of a gas. Part II. - A composite monoatomic gas: Diffusion, viscosity, and thermal conduction". *Phil. Trans. Roy. Soc. London*, **217 A**, (1916), 115.
- Chapman, S.: "The energy of magnetic storms". *Monthly Notices Roy. Astron. Soc.*, **79**, (1918), 70 – 83.
- Chapman, S.: "Solar streams of corpuscles: Their geometry, absorption of light, and penetration". *Proc. Roy. Soc. London*, **A, 95**, (1919), 61 – 83.
- Cowling, T. G.: "The magnetic field of sunspots". *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, **94**, (1933), 39–48.
- Dame, T. M.: "The distribution of neutral gas in the milky way". In "Back to the Galaxy", edited by S. S. Holt und F. Vester, number 278 in AIP Conf. Proc. American Inst. Physics, New York (1993). 267 – 278.

- Decker, R. B., S. M. Krimigis, E. C. Roelof, M. E. Hill, T. P. Armstrong, G. Gloeckler, D. C. Hamilton, und L. J. Lanzerotti: “Voyager 1 in the Foreshock, Termination Shock, and Heliosheath”. *Science*, **309**, (2005), 2020–2024.
- Desai, M. I., R. G. Marsden, T. R. Sanderson, A. Balogh, R. j. Forsyth, und J. T. Gosling: “Particle acceleration at corotating interaction regions in the three-dimensional heliosphere”. *J. Geophys. Res.*, **103**, (1998), 2003 – 2014.
- Dessler, A. J.: “Solar wind and interplanetary magnetic field”. *Rev. Geophys.*, **5**, (1967), 1 – 41.
- Enskog, D.: *Kinetische Theorie der Vorgänge in mässig verdünnten Gasen*. Ph.D. thesis, Uppsala, Sweden (1917).
- Fahr, H. J.: “The interstellar gas flow through the heliospheric interface region”. *Space Sci. Rev.*, **78**, (1996), 199 – 212.
- Fermi, E.: “On the origin of the cosmic radiation”. *Phys. Rev.*, **75**, (1949), 1169 – 1174.
- Fitzgerald, G. F.: “Sunspots and magnetic storms”. *The Electrician*, **30**, (1892), 48.
- Fitzgerald, G. F.: “Sunspots, magnetic storms, comet tails, atmospheric electricity, and aurorae”. *The Electrician*, **46**, (1900), 287 – 288.
- Forman, M. A. und G. M. Webb: “Acceleration of energetic particles”. In “Collisionless shocks in the heliosphere: A tutorial review”, edited by R. G. Stone und B. T. Tsurutani (1985). 91 – 114. Geophysical Monograph, 34.
- Foukal, P. V.: *Solar Astrophysics, 2nd, Revised Edition* (2004).
- Frisch, P. C.: “LISM structure - fragmented superbubble shell?” *Space Sci. Rev.*, **78**, (1996), 213 – 222.
- Gierasch, P. J. und B. J. Conrath: “Dynamics of the atmospheres of the outer planets: Post-voyager measurement objectives”. *J. Geophys. Res.*, **98**, (1993), 5459 – 5469.
- Golub, L. und J. M. Pasachoff: *The Solar Corona*. Cambridge University Press, Cambridge, UK (1997).
- Gomes, R., H. F. Levison, K. Tsiganis, und A. Morbidelli: “Origin of the cataclysmic Late Heavy Bombardment period of the terrestrial planets”. *Nature*, **435**, (2005), 466–469.
- Gosling, J. T., S. J. Bame, W. C. Feldman, D. J. McComas, P. Riley, B. E. Goldstein, und M. Neugebauer: “The northern edge of the band of solar variability: Ulysses at ~ 4.5 AU”. *Geophys. Res. Lett.*, **24**, (1997), 309 – 312.

- Gosling, J. T., G. Borrini, J. R. Asbridge, S. J. Bame, W. C. Feldman, and R. F. Hansen: “Coronal streamers in the solar wind at 1 AU”. *J. Geophys. Res.*, **86**, (1981), 5438 – 5448.
- Gringauz, K. I.: “Some results of experiments in interplanetary space by means of charged particle traps on Soviet space probes”. *Space Res.*, **2**, (1961), 539 – 553.
- Gringauz, K. I., V. V. Bezrikikh, und L. S. Musatov: “Solar wind observations with the Venus 3 probe”. *Cosmic Research*, **5**, (1967), 216 – 222.
- Gringauz, K. I., V. V. Bezrukikh, V. D. Ozerov, und R. E. Rybchinskyi: “Study of the interplanetary ionized gas, high energy electrons, and solar corpuscular radiation by means of three electrode traps for charged particles on the second Soviet cosmic rocket”. *Soviet Physics Doklady*, **5**, (1960), 361 – 364.
- Gry, C.: “Local clouds: Distribution, density and kinematics through ground-based and HST spectroscopy”. *Space Sci. Rev.*, **78**, (1996), 239 – 246.
- Gurnett, D. A., W. S. Kurth, S. C. Allendorf, und R. L. Poynter: “Radio emission from the heliopause triggered by an interplanetary shock”. *Science*, **262**, (1993), 199 – 203.
- Hirzberger, J., M. Vazquez, J. A. Bonet, A. Hanslmeier, und M. Sobotka: “Time Series of Solar Granulation Images. I. Differences between Small and Large Granules in Quiet Regions”. *Astrophys. J.*, **480**, (1997), 406 – 419.
- Hundhausen, A. J.: *Coronal Expansion and Solar Wind*. Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, New York (1972).
- Ingersoll, A. P., P. J. Gierasch, D. Banfield, A. R. Vasavada, und the Galileo Imaging Team: “Moist convection as an energy source for the large-scale motions in Jupiter’s atmosphere”. *Nature*, **403**, (2000), 630–632.
- Jokipii, J. R.: “Acceleration and Transport of Energetic Charged Particles in Space”. *Astrophys. & Space Sci.*, **277**, (2001), 15 – 26.
- Jones, F. C.: “A theoretical review of diffusive shock acceleration”. *astrophys. J. Suppl. Ser.*, **90**, (1994), 561 – 665.
- Kennel, C. F., J. P. Edmonston, und T. Hada: “A quarter century of collisionless shock research”. In “Collisionless shocks in the heliosphere: A tutorial review”, edited by R. G. Stone und B. T. Tsurutani (1985). 1–36. Geophysical Monograph, 34.
- Krieger, A. S., A. F. Timothy, und E. C. Roelof: “A coronal hole and its identification as the source of a high velocity solar wind stream”. *Sol. Phys.*, **29**, (1973), 505 – 525.

- Lallement, R.: "Relations between the ISM inside and outside the heliosphere". *Space Sci. Rev.*, **78**, (1996), 361 – 374.
- Lang, K. R.: *Astrophysical formulae*, volume I. Springer, Berlin, 3rd edition (1999).
- Larmor, J.: "How could a rotating body such as the Sun become a rotating magnet?" *Rep. Brit. Assoc. Adv. Sci.*, 159.
- Leighton, R. B.: "Observations of solar magnetic fields in plage regions". *Astrophys. J.*, **130**, (1959), 366 – 380.
- Leighton, R. B.: "The solar granulation". *Annu. Rev. Astron. Astrophys.*, **1**, (1963), 19 – 40.
- Linsky, J. L., S. Redfield, B. E. Wood, and N. Piskunov: "The three-dimensional structure of the warm local interstellar medium. I. Methodology". *Astrophys. J.*, **528**, (2000), 756 – 766.
- Lodge, O.: "Sunspots, magnetic storms, comet tails, atmospheric electricity, and aurorae". *The Electrician*, **46**, (1900), 249 – 250.
- Mäder, J. A., J. Staehelin, T. Peter, D. Brunner, H. E. Rieder, und W. A. Stahel: "Evidence for the effectiveness of the Montreal Protocol to protect the ozone layer". *Atmospheric Chemistry & Physics*, **10**, (2010), 12161–12171.
- Mazzotta, P., G. Mazzitelli, S. Colafrancesco, und N. Vittorio: "Ionization balance for optically thin plasmas: Rate coefficients for all atoms and ions of the elements h to ni". *Astron. Astrophys. Suppl.*, **133**, (1998), 403 – 409.
- Melosh, H. J. und A. M. Vickery: "Impact erosion of the primordial atmosphere of Mars". *Nature*, **338**, (1989), 487–489.
- Nesis, A., R. Hammer, M. Roth, und H. Schleicher: "Dynamics of the solar granulation". *Astron. Astrophys.*, **317**, (2001), 307 – 317.
- Ness, N. F., C. S. Scarce, und J. B. Seek: "Initial results of the Imp 1 magnetic field experiment". *J. Geophys. Res.*, **69**, (1964), 3531 – 3569.
- Neugebauer, M. und C. W. Snyder: "Mariner 2 observations of the solar wind, 1, average properties". *J. Geophys. Res.*, **71**, (1966), 4469 – 4484.
- Neugebauer, M. und C. W. Snyder: "Relation of plasma properties to the magnetic field". *J. Geophys. Res.*, **72**, (1967), 1823 – 1828.
- Nolte, J. T., A. S. Krieger, A. F. Timothy, R. E. Gold, E. C. Roelof, G. Vaiana, A. J. Lazarus, J. D. Sullivan, und P. S. McIntosh: "Coronal holes as sources of solar wind". *Sol. Phys.*, **46**, (1976), 303 – 322.

- Parker, E. N.: “Dynamics of the Interplanetary Gas and Magnetic Fields.” *Astrophys. J.*, **128**, (1958), 664 – 676.
- Parker, E. N.: *Interplanetary Dynamical processes*. John Wiley & Sons, New York, USA (1963).
- Pätzold, M., B. Häusler, M. K. Bird, S. Tellmann, R. Mattei, S. W. Asmar, V. Dehant, W. Eidel, T. Imamura, R. A. Simpson, *et al.*: “The structure of Venus’ middle atmosphere and ionosphere”. *Nature*, **450**, (2007), 657–660.
- Peter, H.: “On the nature of the transition region from the chromosphere to the corona of the Sun”. *Astron. Astrophys.*, **374**, (2001), 1108–1120.
- Porco, C. C., R. A. West, A. McEwen, A. D. Del Genio, A. P. Ingersoll, P. Thomas, S. Squyres, L. Dones, C. D. Murray, T. V. Johnson, *et al.*: “Cassini Imaging of Jupiter’s Atmosphere, Satellites, and Rings”. *Science*, **299**, (2003), 1541–1547.
- Potter, A. E. und T. H. Morgan: “Evidence for suprathermal sodium on Mercury”. *Advances in Space Research*, **19**, (1997), 1571–+.
- Priest, E. R.: *Solar magneto-hydrodynamics*. Dordrecht, Holland ; Boston : D. Reidel Pub. Co. ; Hingham, (1982).
- Prölss, G. W.: *Physics of the Earth’s Space Environment*. Springer (2004).
- Rieutord, M., T. Roudier, J. M. Malherbe, und F. Rincon: “On mesogranulation, network formation and supergranulation”. *Astron. Astrophys.*, **357**, (2000), 1063 – 1072.
- Scherb, F.: “Velocity distributions of the interplanetary plasma detected by Explorer 10”. *Space Res.*, **4**, (1964), 797 – 818.
- Snyder, C. W. und M. Neugebauer: “Interplanetary solar wind measurements by Mariner 2”. *Space Res.*, **4**, (1964), 89 – 113.
- Stalder, M.: *Entwicklung einer neuen EZR-Ionenquelle für das Kieler Sonnenwindlabor*. Ph.D. thesis, Christian-Albrechts-Universität zu Kiel, Kiel, Germany (2008).
- Stix, M.: *The Sun*. Springer, Berlin (2002). Second edition.
- Sturrock, P. A.: *Plasma physics. an introduction to the theory of astrophysical, geophysical, and laboratory plasmas*. Cambridge, UK: Cambridge University Press, —c1994 (1994).
- Wedemeyer, S., B. Freytag, M. Steffen, H.-G. Ludwig, und H. Holweger: “Numerical simulation of the three-dimensional structure and dynamics of the non-magnetic solar chromosphere”. *Astron. Astrophys.*, **414**, (2004), 1121–1137.